

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191135

UNIVERSAL
LIBRARY

حساب التفاضل والتكامل

تأليف
شفيق بك منصور
(مكتبة)

الجزء الأول
في
حساب التفاضل

يوجد عند احمد افسدي العشي والخواجدة يوسف شيت

بالقاهرة

كتب اخرى للمؤلف

APPLICATION DES MATHEMATIQUES A LA JURISPRUDENCE

(تطبيق الرياضيات على علم القوانين)

تحت الطبع يولاق	{	حساب التفاضل
		مختصر علم الحساب
		مختصر علم الجبر
		مختصر علم الهندسة

حساب التفاضل والتكامل

تأليف

شفيق بك منصور
(يكن)

الجزء الاول

في حساب التفاضل

يوجد عند احدى افندي العشي وانلخواجه يوسف شيت

بالقاهرة

الفرس هت

صفحة

(٢)

المقدمة

الباب الاول

(٣)

تعريفات أولية

(٥)

المتعلقة المشتقة ومعناها الهندسي

(٧)

التفاضل

(٩)

بعض خواص عامة للمشتقات

الباب الثاني

(١٠)

مشتقات المتعلقات وتفاضلاتها

في مشتقة حاصل الضرب وتفاضله : حاصل ضرب متعلقة في كمية

(١١)

ثابتة

(١١)

مشتقة حاصل ضرب متعلقتين

(١٢)

مشتقة حاصل ضرب جملة متعلقات

(١٣)

مشتقة خارج القسمة وتفاضله

(١٣)

مشتقة متعلقة بمتعلقة وتفاضلها

(١٤)

مشتقة المتعلقة المركبة وتفاضلها

الباب الثالث

(١٥)

نهاية $(1 + \frac{1}{x})^x$

(١٨)

تفاضل لوغاريتم x

(١٨)

تفاضل جيب x

الباب الرابع

(٢٠)

تفاضل المتعلقات الجبرية الظاهرة

(٢٠)

امثلة

(٢١)

تمريبات

(٢١)

تفاضل المتعلقات اللوغاريتمية والاسية

(٢٢)

امثلة

صفحة

(٢٢)

تعاريف

(٢٣)

تفاضل المتعلقات الدائرية

(٢٤)

امثلة

(٢٥)

تمرينات

الباب الخامس

(٢٦)

تفاضل المتعلقات المضمرة

المشتقات والتفاضلات ذات المراتب المختلفة لامتعلقات بمتغيرة

(٢٨)

واحدة

(٢٩)

تطبيقات

(٣٢)

قانون لايبنتس

(٣٦)

تمرينات لعمل تفاضل المتعلقات المضمرة

(٣٦)

تمرينات لعمل التفاضلات ذات المراتب المختلفة

(٣٧)

تمرينات لتطبيق قانون لايبنتس

(٣٨)

المشتقات المتتابعة لامتعلقات المضمرة

(٣٩)

تبديل المتغيرة المستقلة

(٤٢)

تمرينات

الباب السادس

(٤٣)

تطبيقات جبرية : نسبة زيادتي متعلقين بمتغيرة واحدة

(٤٦)

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة :

(٤٧)

امثلة

(٤٨)

تمرينات

(٤٩)

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

(٥٠)

امثلة

(٥١)

تمرينات

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة $\infty \times \infty$ و ∞

(٥١)

و ∞ و $\infty - \infty$

الباب السابع

المتسلسلات

(٥٥)

أمثلة

(٥٩)

الباب الثامن

متسلسلة تيلور

(٦٠)

متسلسلة ماكلوران

(٦٩)

متسلسلة بيرنولي

(٧١)

الباب التاسع

تطبيقات على متسلسلة ماكلوران : قانون نيوتن

(٧١)

نشر المتعلقات الاسمية

(٧٤)

نشر لوغار يتم (١ + س)

(٧٥)

نشر بعض متعلقات دائرية

(٧٩)

تجزيئات

(٨٢)

الباب العاشر

العبارات التخيلية

(٨٢)

قانون موافر

(٨٣)

بسط جاسر و جتاسر على حسب جيوب مكررات القوس س

(٨٥)

وجيوب مقامها

(٨٨)

حل المعادلة ذات الجدين $\sqrt{\pm} = \pm$

(٩٠)

معرفة مقدارى جاسر و جتاسر بواسطة الكمية الاسمية التخيلية

(٩١)

اللوغار يتمات التخيلية

الباب الحادى عشر

النهايات الكبرى والصغرى لامتعلقات الظاهرة بتغيرة واحدة

(٩٣)

تطبيقات

(٩٦)

تجزيئات

(٩٧)

النهايات الكبرى والصغرى لامتعلقات المضرة بتغيرة واحدة

(٩٨)

صفحة

(١٠٠)

تقمة الكميات الصغيرة

الباب الثاني عشر

(١٠٣)

تطبيقات هندسية : معادلتى المماس والعمود عليه

(١٠٦)

تطبيقات

(١٠٧)

فى السيكاويد

(١٠٩)

تقرينات

(١١٠)

فى التجويف والتجديف

الباب الثالث عشر

(١١٣)

تفاضل قوس منحني مستو

(١١٥)

تماس المنحنيات المستوية

(١١٩)

المنحنيات الالتصاقية

(١١٩)

الدائرة الالتصاقية

(١٢١)

انحناء المنحنيات

الباب الرابع عشر

(١٢٣)

المنتشرات والاتشارات

(١٢٦)

تطبيقات

(١٣٤)

تقرينات

الباب الخامس عشر

(١٣٥)

المنحنيات المرسومة بالنسبة لاحداثات القطبية

(١٣٧)

المماس وتحتة وتحت العمود

(١٣٩)

تفاضل قوس منحني

(١٣٩)

مركز الانحناء ونصف قطره

(١٤١)

تطبيقات

(١٤١)

المنحنيات ذات الدرجة الثانية

(١٤٤)

فى حلزون ارشميدس

(١٤٦)

فى الحلزون الهذلولي

(١٤٦)

فى الحلزون الاوتغاريتي

مقدمة

(١٤٩)

تقرينات

الباب السادس عشر

في التفاضلات الجزئية والكلمية لامتدادات بعدة متغيرات مستقلة (١٤٩)
التفاضلات الجزئية ذات المراتب المختلفة لامتدادات بجملة

(١٥١)

مستقلات

(١٥٥)

التفاضلات الكلمية ذات المراتب لامتدادات بجملة مستقلات

(١٥٦)

المشتقات ذات المراتب المختلفة لامتدادات بجملة مستقلة واحدة

الباب السابع عشر

(١٥٧)

في تعميم قانون تيلور

(١٦١)

تعميم قانون ماكوران

(١٦٢)

النهايات الكبرى والصغرى لامتدادات بجملة متغيرات مستقلة

الباب الثامن عشر

(١٦٨)

في النقط الممتازة : نقط التغير

(١٦٨)

نقط التكرار

(١٧١)

نقط الرجوع

(١٧٣)

النقط المنقرضة

(١٧٣)

نقط الوقوف

(١٧٤)

النقط المنزوية

(١٧٥)

تقرينات

(١٧٦)

تحليل المنحنيات

(١٧٨)

تقرينات

الباب التاسع عشر

(١٧٩)

المنحنيات ذات الانحنائين

(١٧٩)

المماس

(١٨٢)

المستوى العمودي

(١٨٣)

تفاضل قوس منحن

(١٨٥)

الانحناء

صحيفة

(١٨٧)

تطبيقات على المنحنى البري

الباب العشرون

(١٩٠)

في المستوى المماس للأسطح المنحنية

(١٩٢)

الموشور والاسطوانة المحيطان بسطح منحن

(١٩٣)

تطبيق

الباب الحادي والعشرون

(١٩٥)

المنحنيات الغلافية

(١٩٧)

تطبيق

(١٩٧)

تقرينات

(١٩٨)

السطوح الغلافية

(١٩٩)

تقرينات

تمت الفهرست

(ح)

صواب	خطا	سطر	صفحة
X	+	٦	٢٤
X	+	٨	٢٥
X	+	٢٠	٠٠
$(1-u)X$	$(1-u)+$	٢٠	٢٦
$1 \times 2 \times 2$	$1 \times 2 + 2$	٤	٢٧
$1 + 2$ $(1-u)$	$(-1) \times 2$	٠٠	٠٠
$\frac{6^1 \text{ سر}}{3 \text{ ط}}$	$\frac{6^2 \text{ سر}}{3 \text{ ط}}$	١٤	٤٠
$\frac{6^2 \text{ ص}}{6^1 \text{ سر}}$	$\frac{6^2 \text{ ص}}{6^1 \text{ سر}}$	١٧	
$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^2 \text{ ص}}$	$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^2 \text{ ص}}$	١١	٤٢
تقدم	تقدم	٤	٤٦
$\frac{6^1 \text{ سر}}{6^1 \text{ سر}}$	$\frac{6^1 \text{ سر}}{6^1 \text{ سر}}$	٥	٥٠
$\frac{6^2 \text{ سر}}{6^2 \text{ سر}}$	$\frac{6^2 \text{ سر}}{6^2 \text{ سر}}$	٨	٠٠
$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^3 \text{ سر}}$	$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^3 \text{ سر}}$	١٨	٥١
$\frac{6^4 \text{ سر}}{6^4 \text{ سر}}$	$\frac{6^4 \text{ سر}}{6^4 \text{ سر}}$	١٥	٠٠
بمتوالية	بمتوالية	٧	٥٦
الاولى	الاولى	٩	٠٠
غائبة	غائبة	٠٠	٠٠
$\frac{6^1 \text{ سر}}{6^1 \text{ سر}}$	$\frac{6^1 \text{ سر}}{6^1 \text{ سر}}$	٢	٦١
$\frac{6^2 \text{ سر}}{6^2 \text{ سر}}$	$\frac{6^2 \text{ سر}}{6^2 \text{ سر}}$	٩	٠٠
$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^3 \text{ سر}}$	$\frac{6^3 \text{ سر}}{6^3 \text{ سر}}$	١٨	٦٢
$\frac{6^4 \text{ سر}}{6^4 \text{ سر}}$	$\frac{6^4 \text{ سر}}{6^4 \text{ سر}}$		

صواب	خطا	سطر	صفحة
التي	الذي	٦	٦٣
$\frac{ع}{١٢} م (س)$	$\frac{ع}{١٢} م (س)$	١٠	٦٤
بالتفيرة سه	بالتفيرة	١٦	٥٠
م (س)	م (س)	٥٠	٥٠
ضع جدولاً أى خطا عرضيا قبل السطر الاخير			٥٠
فنتهى	فنتهى	١٤	٦٧
م (٠)	م (س) (٠)	١٣	٦٩
يحكم	أبحكم	١٣	٧٠
ان	ن	١٤	٥٠
الذي	لذى	١٣	٧٥
١ + س	١ × س	١	٧٦
ضع فى أول السطر علامة الضرب ×		١٣	٧٧
جنا ص +	جنا ص +	٤	٨٤
() ع	()	١٩	٥٠
حاصل	حاصل	٩	٨٤
وهو أى الحد المتوسط	وهو	٣	٨٦
$١ + \frac{ع}{٢}$	$١ - \frac{ع}{٢}$	٨	٨٦
$١ + \frac{ع}{٢}$	$١ - \frac{ع}{٢}$	١٦	٨٦
.....	٨	٨٦
لوحظ	لوحظا	٥	٨٧

صواب	خطا	سطر	صفحة
$\bar{د} = ح + ع + \bar{د}$	$\bar{د} = ح + ع + \bar{د}$	٢١	٨٨
$\bar{د}$	نون	٢١	٨٨
الاسية	الاسية	٦	٩٠
$\frac{٢٢}{١}$	$\frac{٢}{٢}$	٣	٩١
α	α	١٥	٩١
يسعى	فيسعى	٦	٩٣
معدومة	معدومة	١	٩٤
الفرق	لفرق	١٥	٩٤
(س - س)	(س - س)	٨	١٠٥
المضنى	لمضنى	١٤	١٠٧
الزاوية	لزاوية	١	١٠٨
المعادلة الاولى	المعادلة	١٢	١٠٩
بدو	بد	٦	١١٠
$\frac{س}{١}$	$\frac{س}{٣}$	٢	١٠٠
$\frac{١ - س}{١}$	$\frac{١ - س}{١}$	٤	١١٠
$\frac{٤}{٤}$	$\frac{٤}{٤}$	٩	١١٢
$\frac{٤}{٤}$	$\frac{٤}{٤}$	١٤	١١٢
لما	لما	٢	١١٣
لمن	لمن	٩	١١٣
ف	دق		

(ك)

صواب	خطا	سطر	صفحة
$\frac{ق}{ص}^2$	$\frac{ق}{ص}^2$	١١	١١٤
ق هي	ق	١٣	١١٤
$\frac{ق}{ق} =$	$\frac{ق}{ق} =$	٤١	١١٤
م (م)	م (م)	٤	١١٦
م (م)	م (م)	٢	١١٦
٣!	٢!	٣	١١٦
٢	٣	١٢	١١٦
يكون	يكون	٤	١١٨
جهتي	جهة	١٠	١١٨
بمخفي معلوم ص	بمخفي معلوم	٦	١١٩
$\frac{ق}{ق} =$	$\frac{ق}{ق}$	٢٢	١١٩
$\frac{ق}{ق}$	$\frac{ق}{ق}$	٣	١٢٠
$\frac{ق}{ق}$	$\frac{ق}{ق}$	٣	١٢٠
$\frac{ق}{ق}$	$\frac{ق}{ق}$	١١	١٢١
الزاوية	الزاوية	١٣	١٢١
نق	نق	١	١٢٩
ب	ب	١	١٢٩
ب	ب	٢	١٢٩
السابقة	السابقة	٥	١٢٩
ع	ع	١١	١٢٩
ص	ص	٦	١٣٣

(ل)

صواب	خطا	سطر	صفحة
و (حرف عطف)	ف	١١	١٣٤
نق + ف نق	نق + ف نق	١٥	١٣٧
٩٠	٩٥	٥	١٣٨
الوتر	الوتر	٦	١٣٨
١٠٠	١١٦	١٠	١٣٨
٩٠	٩٥	١٢	١٣٩
صه + ذ صه	صه + صه	١٤	١٦٠
لا صه	صه	٦	١٦٣
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	٨	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	١٥	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	١٧	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	٥	١٧٤
٣٠	٣٥	٢٠	١٩٠
==	+		
م	م	١٢	١٩٦

ن

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله سريع الحساب المتعال عن التفاضل اذ كل ما سواه مفضل غير كامل وايس الاله التكامل والصلاة والسلام على سيدنا محمد غير محصاني العدد وعلى آله واصحابه الذين كانوا يعدون المآثر المستمرة على الزيادة أحسن العدد (وبعد) فان العلوم الرياضية علوم نفيسة ولاشبهة في أن ينسب اليها معظم التقدم الذي حصل الآن في البلاد الاوروپاوية وخصوصا منذ اختراع علم التحليل العالي أي حساب التفاضل والتكامل اذ به حسنت الميخانيق وتحسنت الآلات التي عليها مدار الصنائع وتقدمت العلوم الفلكية والبحرية والحربية والهندسية العملية فاذا هذا العلم جليل القدر عظيم الفوائد ولذا ألقت فيه هذا الكتاب مما تلقيناه عن أساتذتي ومن الكتب المعتبرة الاوروپاوية أيضا على أسلوب مختصر مفيد لاسيما وقد اوردت فيه من الامثلة والتمارين ما هو تيسير وتقريب للمبتدئين فاصدا به النفع لوطن اذ كان خدمة لابنائنا وأسالة عز وجل أن يلهمني الصواب

هذا أول من وضع هذا العلم رجلا ن كانا متعاصرين في القرن السابع عشر من الميلاد أحدهما لايبنتس الالماني (ولد سنة ١٦٤٦ ومات سنة ١٧١٦) والاخر نيوتون الانجليزي (ولد سنة ١٦٤٢ ومات في سنة ١٧٢٧) وذلك انه لما اخترع ديكارت الفرنسي (ولد في سنة ١٥٩٦ ومات سنة ١٦٥٠) الهندسة الجبرية المعروفة بتطبيق الجبر على الهندسة عظم ميدان المسائل وتخير العلماء في حل أكثرها كمسائل المماس والنهايات الكبرى والصغرى ونسطيح الاشكال وغير ذلك فاشتغل بها هذان العالمان حتى صادقا أصول هذا العلم ثم اجتهد فيه بعدهما الرياضيون الى أن أوصلوه الآن الى ما أوصلوه من الدرجة العظمى من التقدم وهذا أو ان الشروع في المقصود وبالله عز وجل الاستعانة

حساب التفاضل والتكامل

(في حساب المتفاضل)

(الباب الاول)

(تعريفات أولیه)

المطلب (١) الكميات هنا نوعان ثابتة ومتغيرة فالثابتة ما تحفظ طول العملية مقداراً واحداً معيناً والمتغيرة ما تأخذ طولها عدة مقادير مختلفة ولتمييز كل من هذين النوعين عن الآخر نشير غالباً بالثابتة بالحروف المجهة

۷۔ زی ے ھ ف و ث ت ہ ث خ ذ ض ظ غ

والمتغيرة بالحروف المهملة

اذهب وخطك لدم من معصه ر

(٢) تنقسم الكميات المتغيرة الى متعلقة ومستقلة فالمتغيرة ~~ب~~ ^ب يقال انها متعلقة بالمتغيرة ~~ب~~ ^ب والمتغيرة ~~ب~~ ^ب مستقلة اذا اخذت الاولى مقدارا أو جملة مقادير معينة حينئذ يعطى الى الثانية مقدار أو عدة مقادير اختيارية مثلا سطح الدائرة متعلق بنصف قطرها لانه يتغير بتغيره وكذلك المساحة المكونة متعلقة بنصف قطرها وذبذبة البندول بطوله

(٣) هذا التعلقيين غالباً بمعادلة فتسمى الكمية المتعلقة ظاهرة اذا كانت هذه المعادلة محاولة بالنسبة اليها ومضمرة في غير ذلك مثلاً في المعادلة

$$\sqrt{x-1} + x = 3$$

المتعلقة بـ ظاهرة وفي المعادلة

صحة - ٢ - صحة - ١ - ٠

هي مضمرة والدلالة على هذا التعلق بوجه عام يكتب في المتعلقة الظاهرة:

م = م (م) أو م = م (م) أو م = م (م) . . . الخ
وفي المضمرة

م (مه رصه) = اوم (مه رصه) = اوم (مه رصه) = الخ

(ملحوظ) كثيرا ما تكون المتغيرة الواحدة متعلقة بجملة مستقلة كسطح

الاسطوانة فانه متعلق بارتفاعها ونصف قطر قاعدتها فالمعادلة

$$ط = م (صه د صه) أو م (صه ر صه د ط) =$$

معناها أن ط متعلقة بالمتغيرتين صه و صه وبالجملة اذا كانت ع مثلا متعلقة بثلاث متغيرات أو بأكثر من اياها بالرمز

$$ع = م (صه د صه د ط ٠٠٠) أو م (صه د صه د ط ٠٠٠ ع) =$$

(٤) يقال أن المتعلقة صه مستمرة اذا أخذت عدة مقامير حقيقية معينة وكانت الفروق بينها كميات صغيرة جدا عندما تأخذ المستقلة صه عدة مقامير تكون الفروق بينها كذلك كميات صغيرة جدا

(٥) حينما يقرب مقدار المتغيرة صه من كمية معينة ثابتة * بحيث يصير الفرق بينهما صغيرا جدا بقدر ما يراد تسمى الكمية الثابتة * نهاية المتغيرة صه ويكتب بطريق الاختصار $صه =$ مثال ذلك سطح الدائرة فانه نهاية لسطح الشكل المنتظم ذي الاضلاع الانتهائية المرسوم داخلها لان الفرق بينهما صغير جدا كما هو معلوم في الهندسة العادية

(٦) الكمية الصغرى جدا هي التي نهايتها صفر و ينتج من هذا و مما سبق ان كل كمية صغرى تكون متغير غير معينة وتقرّب دائما من الصفر كالفرق بين مساحتي كثير الاضلاع والدائرة المذكور في المطلب السابق

(٧) الكمية العظمى أو الانتهائية هي التي تزداد دائما وتصبحا كبيرا من كل كمية مفروضة ويرمز لها بالعلامة ∞ أو ∞ مثلا $ط =$ يكبر دائما كلما قربت صه من الزاوية القائمة فاذا صار لها نهاية ثابته ∞ كذا $\frac{ط}{صه} =$ يصير لانها ثابته عند ما تكون صه مساوية للكمية * ولوضع هذا على وجه جبري يكتب

$$صه ط = \infty \quad \text{بفرض } صه = \frac{ط}{م} (١)$$

$$و \quad م ط = \frac{ط}{صه} = \infty \quad \text{بفرض } صه = *$$

(١) رمزنا بهذا الحرف ∞ (ط سريانيه) الى نسبة محيط الدائرة لقطرها

(ملحوظ) في حالة ما تكون m في الكمية $\frac{f}{m}$ أصغر من $\frac{f}{m}$ تكون نهايتها موجبة وفي حالة ما تكون أكبر تكون النهاية سالبة فالانهاية تكون حينئذ موجبة أو سالبة

في المتعلقة المشتقة ومعناها الهندسي

(٨) لنفرض $v = m(s)$ متعلقة مستمرة فإذا زادت المستقلة زيادة ما f s زادت المتعلقة مقابلة لذلك بالمقدار f v وتؤول المعادلة المذكورة إلى

$$v + f = v + m(s + f) \text{ أو } f = m(s + f) - m(s) \quad (١)$$

وبقسمة كل من الطرفين على f s يحدث

$$\frac{f}{f} = \frac{m(s + f) - m(s)}{f}$$

فإذا فرضنا أن f s يتناقص إلى غير نهاية تقرب النسبة $\frac{f}{f}$ من نهاية معينة غالباً سماها الرياضي لاجرانج (٢) مشتقة المتعلقة v ورمزها هذا المؤلف الشهير بالرمز v' أو $m'(s)$ حينئذ يكون

$$v' = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{m(s + f) - m(s)}{f} = v' \text{ أو } m'(s)$$

مثلاً لمعرفة مشتقة المتعلقة $v = s'$ المفروض فيها أن s كمية موجبة صحيحة نقول إذا زادت المستقلة s بالمقدار f s زادت المتعلقة v بالمقدار f v كما تقدم ويحدث

$$v + f = (s + f)' \text{ أو } f = (s + f)' - s'$$

ويبسط الكمية ذات الحدين $(s + f)'$ على حسب قانون نيوتن نجد

- (١) الزيادة f v تسمى أيضاً فاضل المتعلقة v
- (٢) ولد سنة ١٦٣٦ ومات سنة ١٨١٣ وهو أحد الفحولانفرنساويين في علوم الرياضيات

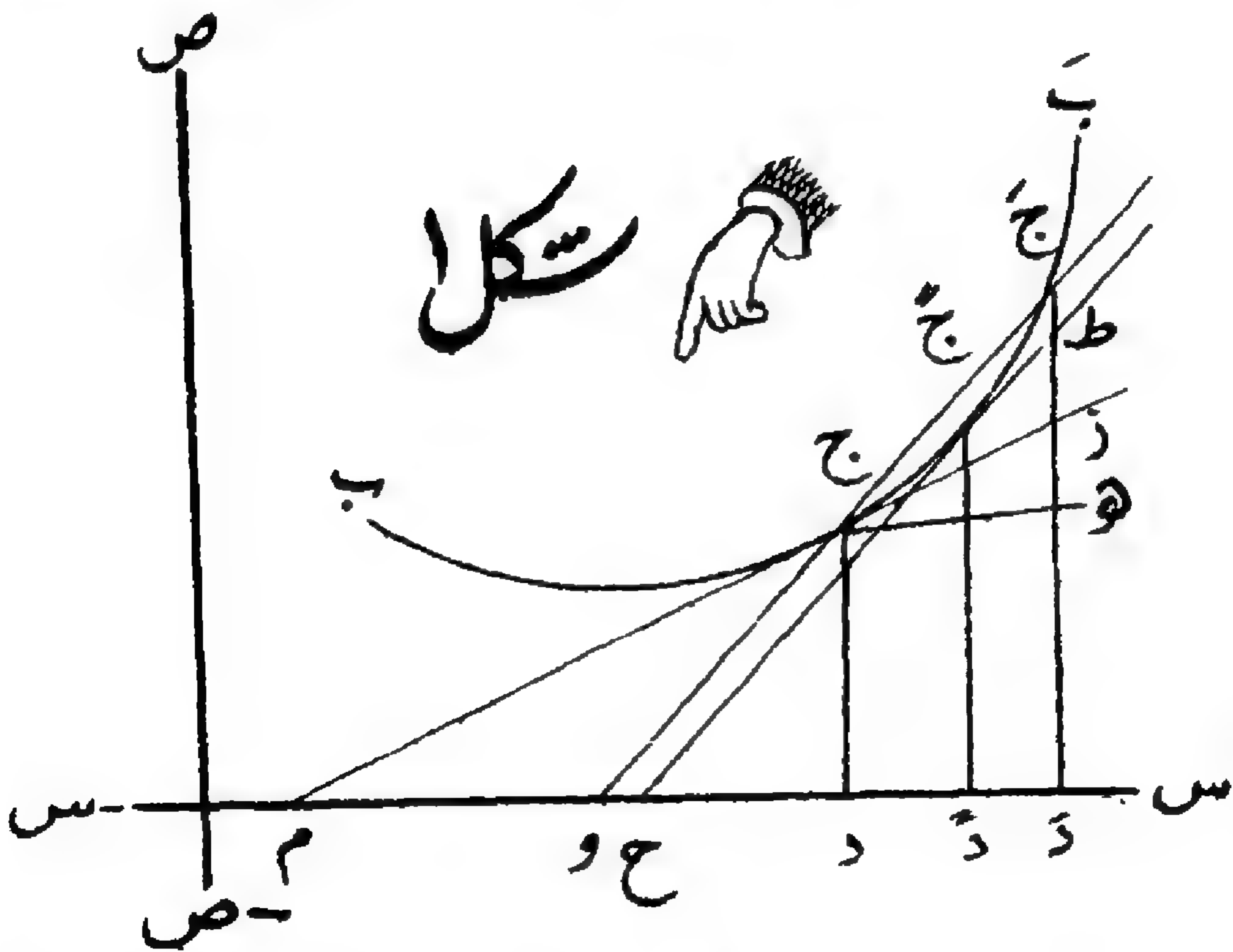
$$(١) \quad \text{ف ص} = \text{ص}^2 + \frac{\text{ص}^2}{1} + \frac{\text{ص}^2}{2} + \frac{\text{ص}^2}{6} + \frac{\text{ص}^2}{24} + \dots$$

وبقسمة كل من الطرفين على ف ص بعد محو ص^٢ يحدث

$$\frac{\text{ص}}{\text{ف}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2} + \dots$$

$$\frac{1}{\text{ف}} = \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{ص}} + \dots$$

وبالمشاهدة نجد أنه كلما نقص ف ص يقرب الطرف الثاني من الكمية ص^١ وعند النهاية يكون $\frac{1}{\text{ف}} = \frac{1}{\text{ص}}$ وهي المشتقة المطلوبة



ولنبحث الآن عن المعنى الهندسي للمشتقات فنقول يمكن ص^٢ منحنياً (شكل ١) مبنياً بالمعادلة $\text{ص} = \text{م}(\text{س})$ وعرسوماً بالتسوية إلى محورين

(١) اعلم بأن في كل ما يأتي العلامة ٥! (بفرض ٥ عدداً صحيحاً) تدل على حاصل الضرب $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

متعامدين α و β فاذافرضنا أن $\alpha = \beta$ و $\alpha = \beta$ ج د
 احداثي (١) النقطة ج الكائنة على المنحنى المذكور وزاد المعين ا د
 بالمقدار ف α مساوي د د فالرتب ج د يصير ج د أو ج د
 $\alpha + \beta$ أعني $\alpha + \beta$ ج ه وحينئذ يكون ج ه هو مقدار
 ف α الذي زاده الرتب α مقابلة لزيادة α التي هي ف α أو
 د د ويرسم قاطع المنحنى ج ج د ومماسه في النقطة ج وهو م ج ز
 ويرسم ج ه موازيا لمحور السينات فيجد في المثلث ج ج ه القائم
 الزاوية

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{ أو } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ أو } \frac{\alpha}{\beta} \text{ أو } \frac{\alpha}{\beta}$$

ومن هنا يفتح أن النسبة $\frac{\alpha}{\beta}$ تعادل غالبا الظل المساحي للزاوية
 الحادثة من تلاقي القاطع ج ج د مع محور المعينات فاذافرضنا أن الزيادة
 ف α أو ماسا د ا ه ا وهو د د يتناقص بالتدريج فيدور القاطع ج ج
 حول النقطة ج ويقرب من المماس ج م وبعبارة أخرى كلما تناقص
 ف α وقرب من الصفر قربت الزاوية ج د α من الزاوية ج م α فاذاتكون
 $\frac{\alpha}{\beta}$ أعني المشتقة تساوي الظل المساحي للزاوية التي هي ميل المماس
 على محور المعينات ومن البديهي أن الزاوية ج م α تتغير بانتقال النقطة
 ج على المنحنى أعني بتغير المعين α فظل هذه الزاوية أعني المشتقة تكون
 متعلقة بالتغيرة α

في التقاض

(٩) حيث أن النسبة $\frac{\alpha}{\beta}$ تقرب من النهاية α يمكن أن يوضع

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha + \beta \text{ أو } \frac{\alpha}{\beta} = \alpha + \beta \text{ أو } \frac{\alpha}{\beta} = \alpha + \beta$$

(١) قد سمينا الاحداث ا د (٢) بالاحداث المعين والاحداث ج د
 بالاحداث المرتب (وهما الساقا ل)

(و كية تعد مع ف سم) فاذا صار ف سم صغيرا جدا سمى الحد الاول وهو ص ف سم تفاضل المتعلقة ص ويرمز له بالرمز γ ص (وتقرأ فا صاد) فيكون

$\gamma = \text{ص ف سم} \text{ أو } \gamma = \text{م (سم) ف سم} \quad (١)$
 وينتج من هذا التعريف أن تفاضل المتغيرة المستقلة سم يساوى الزيادة ف سم لانه اذا فرضنا أن $\text{ط} = \text{سم}$ يكون $\text{ف ط} = \text{ف سم}$ أو $\frac{\text{ط}}{\text{سم}}$
 $= ١$ ومنها $\frac{\text{ط}}{\text{سم}} = ١$ أعني ان مشتقة المتعلقة ط تساوى واحد اذا يكون

$\text{ط أو } \gamma = ١ \times \text{ف سم} = \text{ف سم}$ وهو المطلوب بيانه
 فتصير المعادلة (١)

$$\gamma = \text{م (سم) } \gamma = \text{سم ومنها } \frac{\gamma}{\gamma} = \text{م (سم)} = \frac{\text{ط}}{\text{سم}}$$

ومعنى المعادلة الاولى هو أن تفاضل أى متعلقة يساوى حاصل ضرب مشتقتها في تفاضل المتغيرة المستقلة ولذا سميت المشتقة المكرر التفاضل

ومن الضروري معرفة الفرق بين ف ص و γ أى بين زيادة المتعلقة ص وتفاضلها ولاجل ذلك يقال حيث ان $\gamma = \text{ف سم}$ المساوى د د (ش ١) و $\text{ف ص} = \text{ج ه}$ وكان فى المثلث نرج ه القائم الزاوية

نر ه = ج ه ط نرج ه = ص ه سم يكون نر ه = γ
 ومن هنا ينتج انه يوجد فرق بين زيادة المتعلقة وتفاضلها وان النسبة بينهما وهى $\frac{\text{ف ص}}{\gamma} = ١ + \frac{\text{سم}}{\gamma}$ تقرب من الواحد ان تناقص ف سم الى غير نهاية وكانت المشتقة ص غير صفر

(١٠) اذا كانت المشتقة م (سم) مستمرة بين النهايتين سم و سم + ف سم (أعنى لكل مقادير سم المحصورة بينهما) تاخذ النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\gamma}$ صورة الحافطة لانه يوجد (ش ١) مستقيم وهو ج ه ط مواز لقطع ج ه

ومعنا المعنى في نقطة ج موضوعية بين النقطتين ج و ج وله المعنى
 ا د المحصور بين ا د و ا د أعني بين س و س + ف س فاذا
 فرضنا أن ا د = س + ف س يأخذ (ة) عددا موجبا
 محصورا بين الصفر والواحد يكون

$$\text{طا ج ح د} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س})$$

ومن المعلوم أن طا ج و س = $\frac{\text{ف س}}{\text{س}}$ وان ج ح د = ج و س
 فيكون حينئذ

$$\frac{\text{ف س}}{\text{س}} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س}) \text{ ومنها ف س} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س}) \text{ ف س (١)}$$

(في بعض خواص عامة للمشتقات)

(١١) القانون (١) السابق يفيدنا بعض خواص مهمة للمشتقات
 (الاولى) اذا فرضت الزيادة في س موجبة اتخذت علامتا ف س و
 م (س + ف س) وحيث انه يمكن فرض في س صغيرا صفرا بحيث لا تتغير
 علامة م (س) حينما تزداد س من س الى س + ف س تكون
 م (س + ف س) أو ف س متحدة العلامة مع م (س) وينتج
 من هذا انه اذا اخذت المستقلة مقادير تصاعدية تصاعدت أو تنازلات مقادير
 المتعلقة على حسب كون المشتقة موجبة أو سالبة

(الثانية) اذا كانت مشتقة المتعلقة م (س) معدومة مهما فرضت
 س خلت هذه المتعلقة من المتغيرة س وصارت كمية ثابتة برهانها ان
 يقال حيث ان م (س) = ٠ يكون أيضا على موجب ما فرضنا

$$\text{م} (\text{س} + \text{ف س}) = ٠ \text{ وحينئذ المعادلة (١) تصير ف س} = ٠$$

ومن المعلوم ان ف س = م (س + ف س) - م (س) فينتج

$$\text{م} (\text{س} + \text{ف س}) = \text{م} (\text{س})$$

يعني ان المتعلقة م (س) لا تتغير بتغير س وعليه تكون كمية ثابتة
 وهو المطلوب

(الثالثة) اذا تساوت مشتقتا المتعلقين م (س) و م (س) يكون
فرقهما كمية ثابتة لانه لو وضع

$$ص = م(س) - م(س)$$

لكان $ص + ف = م(س + ف) - م(س + ف)$
ويحدث من ذلك

$$\frac{ص}{ف} = \frac{م(س + ف) - م(س + ف)}{س + ف} - \frac{م(س) - م(س)}{س}$$

وعند النهاية

$$\frac{ص}{ف} = م(س) - م(س)$$

وحيث كان فرضنا $م(س) = م(س)$ يكون $\frac{ص}{ف} = 0$ اعني تكون
ص كمية ثابتة وهو ما اردنا أن تبينه

(١٢) الغرض من حساب التفاضل هو البحث عن مشتقات المتعلقات
وتفاضلاتها وعن تطبيق خواصهما على المسائل الجبرية والهندسية

﴿الباب الثاني﴾

(في مشتقة حاصل الجمع وتفاضله)

(١٣) لتكن ط و د و ح ثلاث متعلقات بالمستقلة س فاذا ارد
ايجاد مشتقة الحاصل ص من

$$ص = ط + د + ح$$

نقول اذا زادت س بالمقدار ف س زادت الكميات الاربع المذكورة
بالمقادير ف ص و ف ط و ف د و ف ح وينتج

$$ص + ف = (ط + ف) + (د + ف) + (ح + ف)$$

ويطرح المعادلة الاولى من الثانية طرفا من طرف فيحدث

$$ف ص = ف ط + ف د + ف ح$$

وبقسمة كل من طرفي هذه المعادلة على ف س يوجد

$$\frac{ص}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{د}{س} + \frac{ح}{س}$$

ويأخذ

ويأخذ النهايات يحصل

$$\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط}$$

$$\text{أو} \quad \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط}$$

وهي المشتقة المطلوبة

وإذا أريد التفاضل يكفي أن نضرب طرفي هذه المعادلة في $ط$ فيحدث

$$ص = ط - ط + ط + ط$$

اعني أن مشتقة حاصل جمع متعلقين أو جملة متعلقات تساوي حاصل جمع مشتقات هذه المتعلقات وكذا تفاضله

(في مشتقة حاصل الضرب وتفاضله)

(حاصل ضرب متعلقة في كمية ثابتة)

(١٤) لنكن المعادلة $ص = ط$ التي فيها $ط$ كمية ثابتة و $ط$

متعلقة بالمستقلة $ص$ فإذا زادت $ص$ بالمقدار $ف$ $ص$ حدث كما تقدم

نظيره

$$ص + ف = ص + (ط + ف) = ص + ط + ف$$

ويحذف المدين المتساويين وهما $ص$ و $ط$ يحدث

$$ف = ف \quad \text{ومنه} \quad \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط}$$

ويأخذ النهايتين ينتج $\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط}$ وهي المشتقة المطلوبة

ويضرب كل من الطرفين في $ط$ نجد $ص = ط$ وهو التفاضل

وينتج من ذلك أن مشتقة حاصل ضرب متعلقة أو تفاضله في $ص$ ثابت

يساوي حاصل ضرب مشتقة المتعلقة أو تفاضله في المكرر الثابت

(حاصل ضرب متعلقين)

ولمعرفة المشتقة لحاصل ضرب متعلقين بالمستقلة $ص$ نفرض أن $ص =$

$ط$ فزيادة $ص$ بالمقدار $ف$ $ص$ يحدث

$$ص = (ط + ف) (ط + ف) = ط + ط + ف + ف + ط$$

$$\text{أو} \quad ص = ط + ط + ف + ف + ط$$

وبقسمة كل من الطرفين على $ف$ نجد

$$\frac{ص}{س} = و + \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + ف \times \frac{ط}{س}$$

وبفرض أن $ف$ $س$ كمية صغيرة جدا ينعدم الحد الأخير لانه يصير حاصل ضرب مشتقة $ط$ في كمية صغيرة جدا وهي $ف$ وحينئذ يكون

$$\frac{ص}{س} = و + \frac{ط}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = و + ط$$

ومنها

اعني ان مشتقة حاصل ضرب متعلقين أو تفاضله يساوي حاصل ضرب المتعلقة الاولى في مشتقة الثانية أو تفاضلهما زائدا حاصل ضرب الثانية في مشتقة الاولى أو تفاضلهما

(حاصل ضرب جملة متعلقات)

وبمثل ما سبق يمكن ايجاد المشتقة لحاصل ضرب جملة متعلقات عددها $ك$ أو تفاضله فانه اذا فرضنا أن

$$ص = و ط ل الخ$$

$$بحيث \quad ف ص = (و + ف) (ط + ف) (ل + ف) الخ$$

$$- و ط ل الخ$$

واذا اجرينا عملية الضرب ورمزنا بالحرف $غ$ لحاصل جمع الحدود المشتملة على زيادتين فاكثرت من الزيادات $و$ $ف$ $ط$ ثم قسمنا كلامنا الطرفين على $ف$ $س$ فنجد

$$\frac{ص}{س} = ط ل + \frac{و}{س} ل + \frac{ط}{س} + \frac{ل}{س} + \frac{ع}{س}$$

وحيث ان $هـ$ $\frac{ع}{س}$. كما تقدم يكون

$$\frac{ص}{س} = ط ل + \frac{و}{س} ل + \frac{ط}{س} + \frac{ل}{س} + \frac{ع}{س}$$

ومنه

$$\frac{ص}{س} = ط ل + و + ط + ل + ع$$

اعني ان مشتقة حاصل ضرب متعلقات عددها $ك$ في بعضها أو تفاضله يعادل مشتقة الاولى أو تفاضلهما في حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة الثانية أو تفاضلهما في حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة الثالثة أو

تفاضلها في حاصل ضرب المتعلقات الباقية وهذا الى المتعلقة الموضوعة
(في مشتقة خارج القسمة وتفاضله)

(١٥) اذا فرضنا ان $\frac{v}{u} = \frac{d}{u}$ خارج قسمة المتعلقين d و u ط بالاستقلة
سر يحدث

$$\frac{v}{u} = \frac{d}{u} = \frac{d+u-u}{u} = \frac{d}{u} - \frac{u-u}{u} = \frac{d}{u} - \frac{u-u}{u}$$

وبقسمة كل من الطرفين على $\frac{d}{u}$ نجد

$$\frac{\frac{v}{u}}{\frac{d}{u}} = \frac{\frac{d}{u}}{\frac{d}{u}} = 1$$

فاذا فرضت $\frac{d}{u}$ كقيمة صغيرة جدا انعدمت $\frac{d}{u}$ وآت المعادلة الى

$$\frac{\frac{v}{u}}{\frac{d}{u}} = \frac{d}{u}$$

ومنها

$$\frac{v}{u} = \frac{d}{u}$$

اعني ان مشتقة خارج القسمة أو تفاضله يعادل حاصل ضرب مشتقة المقسوم
أو تفاضله في المقسوم عليه ناقصا حاصل ضرب مشتقة المقسوم عليه أو تفاضله
في المقسوم مقسوماً بباقيه على مربع المقسوم عليه
(في مشتقة متعلقة بمتعلقة وتفاضلها)

(١٦) اذا فرضنا ان $\frac{v}{u} = \frac{d}{u}$ و $\frac{d}{u} = \frac{m}{u}$ وان $\frac{d}{u}$ هي
المتغيرة المستقلة يقال ان $\frac{d}{u}$ متعلقة بمتعلقة فلايجاد مشتقتها أو تفاضلها

بالنسبة الى $\frac{d}{u}$ يكفي وضع مقدار $\frac{d}{u}$ في المعادلة الاولى فنصير $\frac{d}{u} =$

$\frac{m}{u}$ [$\frac{d}{u}$] ثم يجري العمل كما تقدم

وهناك طريقة أخرى وهي ان نفرض أولاً المتطابقة

$$\frac{v}{u} = \frac{d}{u} \times \frac{u}{u}$$

وحيث ان $\frac{u}{u} = 1$ و $\frac{d}{u} = \frac{m}{u}$ و $\frac{m}{u} = \frac{d}{u}$

يكون حينئذ $\frac{v}{u} = \frac{d}{u} \times \frac{u}{u}$ (١)

فيؤخذ من ههنا ان مشتقة متعلقة بمتعلقة تساوي حاصل ضرب مستقني المتعلقين . وهذه الداعلة تجري على متعلقة بمتعلقة بمتعلقة الخ .

ومن القانون (١) ينتج $ص = م (ط) م (س) س$ وهو التفاضل (في مشتقة المتعلقة المركبة وتفاضلها)

(١٧) اذا كانت $ط$ و $ل$ متعلقين بالمستقلة $س$ وكانت $ص = م (ط) ل$ يقال ان $ص$ متعلقة مركبة بالمتغيرة $س$ فلان حاصل على مشتقاتها قول اذا زادت $س$ بالمقدار $ف$ زادت المتعلقتان $ط$ و $ل$ مقابلة لذلك كما تقدم ويحدث

$ف ص = م (ط + ف ط + ل + ف ل) م (س) ل$
وبفرض $ل$ كمية ثابتة وأخذ $م (ط) ل$ رمز المشتقة $م (ط) ل$ اعني $ص$ بالنسبة الى $ط$ يحدث بناء على ما في المطلب ٩

$م (ط + ف ط + ل) = م (ط) ل + ف م (ط) ل + [د] (١)$
 $د$ كمية تنعدم اذا فرضت $ف$ صغيرة جدا وصارت $ط$ وكذلك اذا فرضنا ان الثابتة هي $ط$ ورمزنا بالرمز $م (ط) ل$ المشتقة $م (ط) ل$ بالنسبة الى $ل$ نجد

$م (ط + ل + ف ل) = م (ط) ل + ف ل م (ط) ل + [د]$
($د$ كمية تنعدم اذا صغرت $ف$ وصارت $ط$ وبوضع $ط + ف ط + ل$ بدلا عن $ط$ في هذه المعادلة الاخيرة تتغير $د$ وقصير $د$ مثلا ويكون حينئذ

$$م (ط + ف ط + ل + ف ل) = م (ط + ف ط + ل)$$

$$+ ف ل م (ط + ف ط + ل) + [د]$$

فاذا وضعنا في هذه المعادلة بدلا عن $م (ط + ف ط + ل)$ مقدارها في المعادلة (١) ينتج

$$ف ص = ف ط [م (ط) ل + [د] + ف ل م (ط) ل + [د]$$

وبقسمة كل من الطرفين على $ف$ س يوجد

$$\frac{ص}{س} = \frac{ط}{س} [م (ط) ل + [د] + \frac{ف ل}{س} م (ط) ل + [د]$$

ويأخذ

وبأخذ النهايات بصير

$$(٢) \quad \frac{ص}{ط} = م ط (ط دل) \frac{ط}{ط} + م ر (ط دل) \frac{ط}{ط}$$

ولو أخذنا عوضا عن م ط و م ر قيمتهما يكون

$$(٣) \quad \frac{ص}{ط} = \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط}$$

وهي المشتقة

(تنبيه) اعلم أن في هذه المعادلة معنى ط في $\frac{ط}{ط}$ غير معناها في $\frac{ط}{ط}$ لأنها في الكمية الأولى تدل على زيادة صغيرة جدا للمتغيرة ط باعتبارها مستقلة وأما في الثانية فتدل على تفاضل ط باعتبارها متعلقة بالمتغيرة ط فلا يلزم حينئذ محوهما وكذلك ط

ومن المعادلة (٣) ينتج $\frac{ص}{ط} + \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط}$ وهو التفاضل وإذا كانت $ص = م (ط دل دء ٠٠٠٠)$

فتجد أيضا

$$\frac{ص}{ط} = \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \dots$$

ومنها

$$\frac{ص}{ط} = \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \cdot \frac{ط}{ط} + \dots$$

اعني ان المشتقة أو تفاضل متعلقة م كمية بجملة متغيرات متعلقة بالمستقلة ط يساوي حاصل ضرب مشتقة أو تفاضل المتعلقة الأولى في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة إليها إذا حصل ضرب مشتقة أو تفاضل الثانية في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة إليها وهكذا

الباب الثالث

في نهاية (١ + $\frac{١}{ط}$)

(١٨) البحث عن تفاضل لغا ط يتعلق (١) بمعرفة نهاية الكمية (١ + $\frac{١}{ط}$)

(١) رمزنا بالعلامة لـ اللوغاريتم البرجسي أي الذي أساسه ١٠ وبالعلامة لغ للنمبر ياني كما سيأتي

المفروض فيها ان ϵ تزيد الى غير نهاية . ولذا نفرض ان مقدار ϵ موجب ونرمز بالحرف γ لا كبر عدد صحيح مشتمل عليه ϵ وبالحرف δ الكسر الباقي فيكون $\epsilon = \gamma + \delta$ ويكون

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma + \delta} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} + 1\right)$$

واذا بسطنا الكمية ذات الحدين $\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)$ بموجب قانون فيوتون نجد

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{1} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\gamma(\gamma-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

وبضرب الطرف الثاني في γ وقسمته عليه يكون

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) + \dots$$

وينتج من المعادلة $\epsilon = \gamma + \delta$ ان $\frac{\gamma}{\epsilon} = 1 - \frac{\delta}{\epsilon}$ فيقرب $\frac{\gamma}{\epsilon}$ من الواحد كلما زادت كمية ϵ فاذا فرضنا ان $\frac{\gamma}{\epsilon} = 1 - \delta$ يحدث

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \frac{1}{1 - \delta} + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \delta} - 1\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \delta} - 1\right) \left(\frac{1}{1 - \delta} - 1\right) + \dots$$

وياخذ δ رمز العدد النوني أعني الحد الذي قبله حدود عددها n يكون

$$\frac{(1 - \delta^n - 1) \dots (1 - \delta^2 - 1) (1 - \delta - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \delta^n$$

والحدود التي بعده تكون

$$\frac{(1 + \delta^n - 1) (1 + \delta^{n-1} - 1) \dots (1 + \delta^2 - 1) (1 + \delta - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = 1 + \delta^n$$

ويترك الكميات السالبة وأخذ الواحد بدلا عن δ في البسوط وعوضا عن $1 + \delta$ و $1 + \delta^2$ في المقامات العدد الاصغر $1 + \delta$ تكبرا لاطراف الثانية أعني ان

$$\frac{\delta^n}{1 + \delta} > 1 + \delta^n \quad \text{و} \quad \frac{\delta^n}{1 + \delta^n} > 1 + \delta^n$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$$

ويجعل $\varepsilon = \infty$ يكون

$$\alpha = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \text{ مـ } 1 = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \text{ مـ } 1$$

في تفاضل لوغاريتم (سـ)

١٩. اذا كان $\nu = \text{لغا سـ}$ يكون

$$\nu = \text{لغا} (س + ف) - \text{لغا سـ} = \text{لغا} \left(1 + \frac{ف}{س}\right)$$

وبقصة كل من الطرفين على $ف$ يحدث

$$\frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{ف}{س}\right)}{\frac{ف}{س}} = \frac{1}{\frac{ف}{س}} \cdot \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{ف}{س}\right)}{\frac{ف}{س}} = \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{ف}{س}\right)}{\frac{ف}{س}}$$

واذا فرضنا ان $\varepsilon = \frac{ف}{س}$ يكون

$$\frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}} = \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}}$$

وكما صغر $ف$ كبر ε فباخذ النهايتين يحدث

$$\frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}} = \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}}$$

وهو التفاضل

$$\frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}} = \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}}$$

ومنها

واذا كان ε أساس اللوغاريتم هي اللوغاريتم نيربانياو يرمز له بالرمز لغا فيكون $\varepsilon = 1$ وحينئذ تؤل المعادلة السابقة الى

$$\frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}} = \frac{\text{لغا} \left(1 + \frac{\varepsilon}{س}\right)}{\frac{\varepsilon}{س}}$$

ومنها

في تفاضل جيب (سـ)

٢٠. ليعلم ان خطوط القوس المساحية ونفس القوس $س$ منسوبة الى دائرة نصف قطرها يساوي واحدا ليكن (شـ) $\text{لغا} = س$ قوس أصغر من ربع محيط الدائرة فيكون

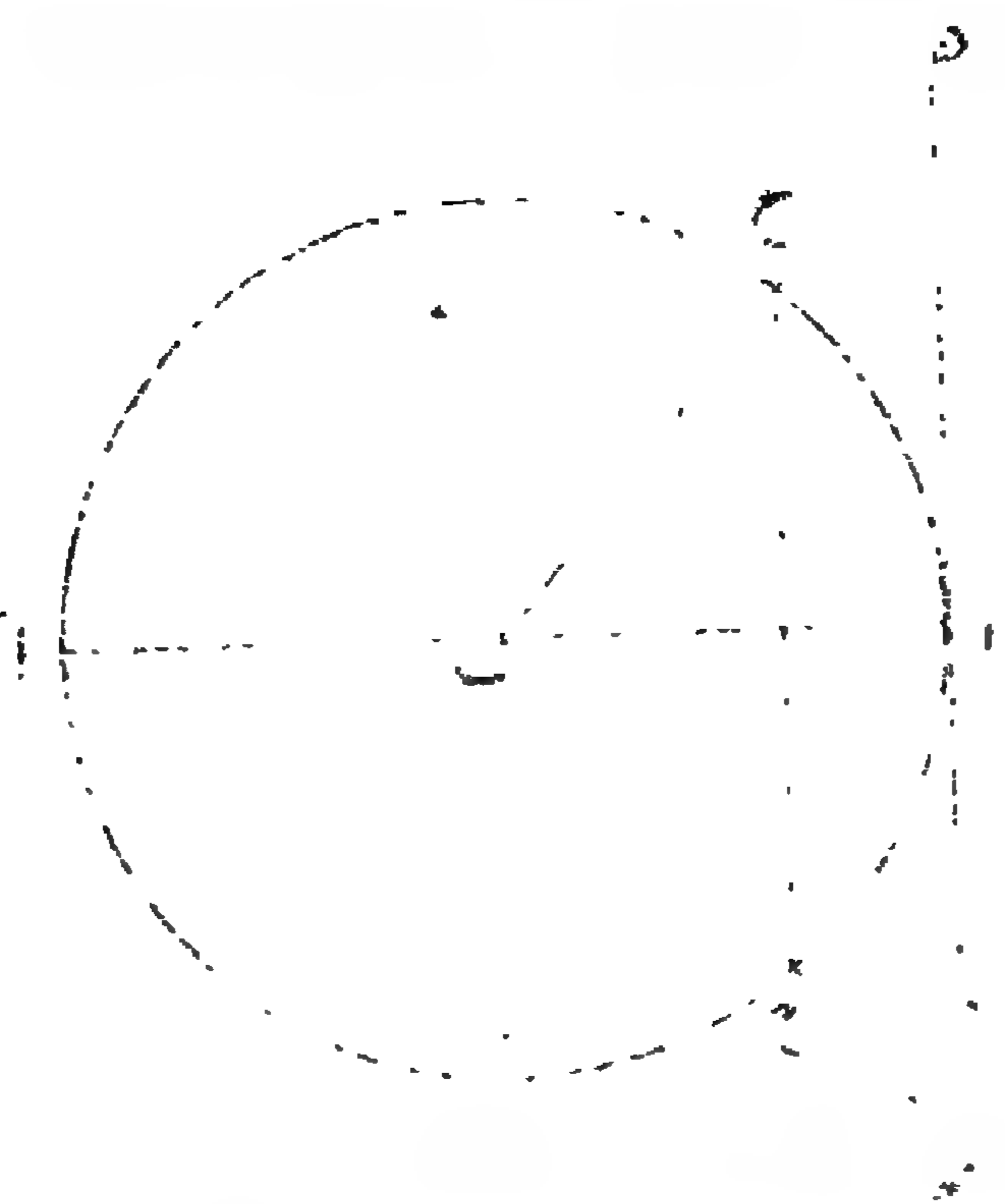
$$\text{وشرج ج} > \text{قوس ج} > \text{لغا} > \text{س} > \text{س} > \text{س}$$

(١)

جاسر > س

ومنه

وحيث ان قطع الدائرة ج أ ب أصغر من المثلث ه د ب فيكون



$$\text{قوس ج ب ج} \times \frac{1}{r} > \text{ه د} + \frac{1}{r}$$

ومن هذا يؤخذ ان

$$\frac{\text{قوس ج ب ج}}{r} > \frac{\text{ه د}}{r} \text{ او } \text{سر} > \text{جاسر}$$

ومنها

$$\frac{\text{حاسر}}{\text{سر}} < \text{جناسر}$$

وينتج من هذه المتباينة والمتباينة (١) ان

$$1 < \frac{\text{حاسر}}{\text{سر}} < \text{جناسر}$$

ومن المعلوم انه كلما قرب القوس سر من الصفر قرب جناسر من الواحد فينتد

يكون $\frac{\text{حاسر}}{\text{سر}} = 1$. ولنفرض الان ان $\text{سر} = \text{حاسر}$ فيجدن

$$\text{ف} = \text{سر} = (\text{سر} + \text{ف} \text{ سر}) - \text{حاسر}$$

وبوجب قانون معلوم من حساب المثلثات أول هذه المعادلة الى هذه

$$\text{ف} = \text{سر} = 2 \text{ جا } \frac{\text{سر}}{2} \text{ جناسر} (\text{سر} + \frac{\text{سر}}{2})$$

أو

$$\frac{ص}{ص} = \frac{(ح + \frac{ص}{س})}{(ص + \frac{ص}{س})}$$

وحيث ان

$$ح = \frac{ص}{س}$$

يكون

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

ومنه

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$$

وهو التفاضل

القواعد السابقة تكفي لايجاد تفاضل أى متعلقة كانت

الباب الرابع

في تفاضل المتعلقات الجبرية الظاهرة

٢١ . قد علم فيما سبق تفاضل المتعلقة $ص = ح$ بفرض $ح$ عددا صحيحا موجبا فاذا اريد معرفته بفرضه عددا حقيقيا اتفق لكنه حقيقى غير تخيلى يؤخذ الاوغاريتم النيربانى لكل من الطرفين فيوجد

$$لع ص = ح لع س$$

وبأخذ تفاضلى طرفى هذه المعادلة يحدث

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ح}{ص} \quad \text{أو} \quad \frac{ص}{ص} = \frac{ح}{ص}$$

وبوضع $ص$ عوضا عن $ح$ ينتج

$$ص = ح$$

وهو التفاضل . فالقاعدة واحدة في الحالتين . أعنى انه يوجد تفاضل كمية مرفوعة لقوة ما $ح$ بضربها فى الاس $ص$ وطرح الواحد من اسمها (فيصير $ص - ١$) وضرب الحاصل فى تفاضها

أمثلة

$$١ \quad ٥ \quad ١-٦ \quad ٦ \quad ٦ \quad ٥$$

$$٦ = ٥ \quad ٦ = ٥ \quad ٦ = ٥$$

مقداري ط و ط في المعادلة (١) بدلا عنهما نجد

وهو المطلوب

$$\text{ط} \cdot \text{لع} = \text{ط} = \frac{\text{ط}(\text{سر})}{\text{ط}(\text{سر})}$$

فتجد

$$\text{سر} = \text{لع} \cdot \text{ط} = \text{ط} + \text{سر} + \text{ط} + \text{سر}$$

ليكن مثلا

$$\frac{\text{ط}(\text{سر})}{\text{ط} + \text{سر}} = \text{سر}$$

ولايجاد تفاضل متعلقة اسية نقرض $\text{سر} = \text{ط} + \text{سر}$ (عدد موجب) ثم تأخذ
لوغاريتمي الطرفين فيحدث

$\text{لع} \cdot \text{سر} = \text{سر} + \text{لع}$ ومنه $\frac{\text{ط}(\text{سر})}{\text{ط} + \text{سر}} = \text{لع} + \text{سر}$ او $\text{سر} = \text{لع} + \text{سر}$ و
وبوضع سر عوضا عن سر نجد

وهو المطلوب

$$\text{ط} \cdot \text{لع} = \text{ط} + \text{سر}$$

ومن هذا القانون ينتج

$$\frac{\text{ط}(\text{سر})}{\text{ط} + \text{سر}} = \text{لع} + \text{سر}$$

فاذا فرضنا ان $\alpha = \text{لع}$ يكون $\text{لع} = \alpha = 1$ (مطلب ١٩) ومنه

$$\alpha = \frac{\text{ط}(\alpha)}{\text{ط} + \alpha}$$

أعني ان مشتقة α تساويها

وبمثل ما ذكر يوجد ان $\text{ط} \cdot \text{لع} = \text{ط} + \text{سر}$

أمثلة

$$١. \text{سر} = \text{لع} (١ - \text{سر}) \text{ فتجد } \text{ط} = \frac{(١ - \text{سر}) \cdot \text{ط}}{\text{سر} - ١} = \frac{\text{ط}(\text{سر})}{\text{سر} - ١}$$

$$٢. \text{سر} = \text{لع}(\text{سر}) \text{ فنضع } \text{ط} = \text{لع} \cdot \text{سر} \text{ و } \text{سر} = \text{لع} \cdot \text{ط} \text{ فتؤول المعادلة الى } \text{ط} = \text{لع} \cdot \text{ط} \text{ وبمقتضى القانون (٢) من المطلب ١٧ يحدث}$$

$$\text{ط} = \text{لع} \cdot \text{ط} = \text{ط} + \text{ط} + \text{لع} \cdot \text{ط}$$

$$\text{ومنه } \text{ط} = \text{سر}(\text{لع} \cdot \text{سر}) + \text{ط} + \text{لع}(\text{سر}) \cdot \text{لع} \cdot \text{سر}$$

تجربيات

$$١. ص = ل (ل ع) الجواب ٦ = \frac{٦س}{س ل ع س}$$

$$٢. ص = ل [\frac{١}{٢} + س + (١ + س - س + س)] الجواب ٦ = \frac{١}{٢} (١ + س - س + س)$$

$$٣. ص = ل (س) الجواب ٦ = (س) (١ + س) ٦س$$

$$٤. ص = ل \frac{١ - س}{١ + س} الجواب ٦ = \frac{١٢ - ٦س}{١ - س - س - س}$$

في تفاضل المتعلقات الدائرية

٢٣. لتكن ط متعلقة بالمستقلة س فيكون يتواء على ما تقدم

$$٦ ح ط = ج ن ط ٦ ط$$

وللتحصيل على تفاضل ج ن ط نفرض ط = $\frac{٨}{٢} - س$ فينتدبير

$$ج ن ط = ج ن (\frac{٨}{٢} - س) = ح ط$$

ويكون ٦ ج ن ط = ٦ ح ط = ج ن س ٦ س = ج ن ط ٦ ($\frac{٨}{٢} - ط$)

ومنه ٦ ج ن ط = ح ط ٦ ط . وهو المطلوب

واذا أريد البحث عن تفاضل ن ط ط نفرض ان ص = ن ط ط فيكون كما هو معلوم

$$٦ = ص = \frac{ج ن ط}{ج ن ط} = \frac{ج ن ط ٦ ج ن ط + ح ط ٦ ج ن ط}{ج ن ط}$$

$$٦ = \frac{ج ن ط + ح ط}{ج ن ط}$$

$$٦ = \frac{ح ط}{ج ن ط}$$

وبهذه الطريقة نجد ان ٦ ن ط ط = ح ط ٦ ط

وبواسطة قانونين معلومين من حساب المثلثات وهما قاط $\frac{1}{\text{جنا ط}}$

وقنا ط $\frac{1}{\text{حاط}}$ وعلم بالسهولة تفاضل القاطع وقاطع القمام فيكون

$$\text{جنا ط} \cdot \text{قنا ط} = \text{قنا ط} \cdot \frac{\text{جنا ط}}{\text{حاط}} = \text{قنا ط} \cdot \frac{\text{جنا ط}}{\text{حاط}}$$

واذا فرضنا ان ص قوس جيبه ط يكتب
ص = قوس جيب ط (١)

ومنه ط = حاصر فيأخذ التفاضل يحدث $\text{جنا ط} = \text{جنا ص} \cdot \text{قنا ص}$ وحيث

ان ط = ج ص يكون كما هو معلوم جنا ص = $\sqrt{1 - \text{ط}^2}$ وحيث

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{ط}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}}$$

وهو المطلوب

اما اذا كان ص = قوس جيب ط لوجدنا

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{ط}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}} = \frac{\text{جنا ص}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}}$$

وهو التفاضل

واذا كان ص = قوس ط يكون ط = طا ص ومنه $\text{جنا ص} = \frac{\text{جنا ص}}{\text{جنا ص}}$

$$\text{جنا ص} = \frac{1}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2}$$

وحيث ان

$$\text{جنا ص} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص}}$$

ينج

وهو المطلوب

وان كان ص = قوس ط لوجد مثل ما تقدم

$$\text{جنا ص} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص}}$$

وان كان

امثلة

$$1 = \text{قوس ط} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ط}^2}} \text{ فيجعل } \sqrt{1 + \text{ط}^2} = \frac{1}{\text{جنا ط}} \text{ ومنه}$$

$$\text{جنا ط} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ط}^2}} \text{ و } \text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ط}}{\sqrt{1 + \text{ط}^2}}$$

(١) المتعاقبات قوسا وقوسنا وقوسنا الخ تسمى دائرية عكسية

$$و \quad 6 ط = \frac{6 سر}{(1+1) \sqrt{1+1}} \text{ فہنتذیکون } 6 ص = \frac{6 سر}{1+1}$$

$$۰۲ ص = فوطا = \frac{سر}{\sqrt{1-1}} \text{ قضع ط } = \frac{سر}{\sqrt{1-1}} \text{ فہنکون}$$

$$6 ص = \frac{6 سر}{(1-1) \sqrt{1-1}}$$

$$و \quad 6 ط = \frac{6 سر}{(1-1) \sqrt{1-1}} \text{ فہا ایکون } 6 ص = \frac{6 سر}{\sqrt{1-1}}$$

$$۰۳ ص = \frac{1}{1+1 ط سر} \text{ فہجد } 6 ص = \frac{6 ط سر}{(1+1 ط سر)}$$

$$= \frac{6 سر}{جنا سر (1+1 ط سر)}$$

$$= \frac{6 سر}{(جنا سر + 1 ط سر)}$$

$$- \text{ (تعبیر بنات) } -$$

$$۰۴ ص = ط سر + \frac{1}{4} ط سر^3 \text{ الجواب } 6 ص = \frac{6 سر}{4} \text{ جنا سر}$$

$$۰۲ ص = 6 ص = \frac{6 سر}{4} \text{ الجواب } (6 ص = 6 سر - 6 ص = 6 سر)$$

$$۰۳ ص = 6 ص = \frac{6 سر}{4} \text{ الجواب } \frac{1}{4} (1-1) ط سر = 6 ص \text{ قوجا سر}$$

$$۰۴ ص = 6 ص = \frac{6 سر}{4} \text{ الجواب } (1+1 ط سر) = 6 ص = 6 سر \text{ جنا سر}$$

$$۰۵ ص = 6 ص = \frac{6 سر}{(1-1) ط سر} \text{ الجواب}$$

$$6 ص = \frac{6 سر}{(1-1) ط سر}$$

$$٠٦ \text{ ص} = \frac{٢}{٣} \text{ سر} + \left(\frac{٢}{٣} \text{ جنا سر} + \text{جنا سر} \right) \text{ الجواب}$$

$$٦ \text{ ص} = ٤ \text{ جنا سر} \text{ ٦ سر}$$

$$٠٧ \text{ ص} = ٣ \text{ جنا (اع سر} - \frac{٢}{٣}) \text{ الجواب}$$

$$٦ \text{ ص} = ٧ - ٢ \text{ جنا (اع سر} \text{ ٦ ص}$$

$$٠٨ \text{ ص} = \text{قو طا} \left[\frac{١}{٢} \left(\frac{٢ - ٢}{٢ + ٢} \right) \text{ طا سر} \right] \text{ الجواب}$$

$$٦ \text{ ص} = \frac{١}{٢} \times \frac{(٢ - ٢) \text{ آ سر}}{٢ + ٢ \text{ جنا سر}}$$

الباب الخامس

في تناضل المتعلقات المضمرة

٢٤. انكن ص متعلقة بالمستقلة سر مبيّنة بالمعادلة

$$٠ = \text{م (سر ص)}$$

فلا يجاء المشتقة $\frac{٦}{٦}$ بدون حل هذه المعادلة نعتبر المتعانة مركبة ونضع

$$\text{ط} = \text{م (سر ص)} \text{ فنجد بموجب ما قلنا في المطلب ١٧}$$

$$\text{ط} = \frac{٢}{٦} \text{ سر} + \frac{٢}{٦} \text{ ص}$$

وحيث $\text{ط} = ٠$ فيكون أيضا $\text{ط} = ٠$ ويؤول القانون الاخير الى

$$\frac{٢}{٦} \text{ سر} + \frac{٢}{٦} \text{ ص} = ٠$$

ومنه

$$\frac{٢}{٦} \text{ ص} = - \frac{\frac{٢}{٦} \text{ سر}}{\frac{٢}{٦}}$$

وهي المشتقة

ومنها

$$\text{ص} = - \frac{\frac{٢}{٦} \text{ سر}}{\frac{٢}{٦}} \text{ (١) وهو التفاضل}$$

ليكن

ليكن مثلاً $m = (r - s) = r^2 - s^2 + r$

فنجِد $\frac{r}{r-s} = (r - s) = r^2 - s^2 + r$

$\frac{r}{r-s} = (r - s) = r^2 - s^2 + r$

وبموجب القانون (١) يكون

$r = \frac{r(r-s)}{r-s} = r$

وإذا فرض أن

$r - s = 1$

فنجِد $\frac{r}{r-s} = r$ و $r - s = 1$ ويحدث

$\frac{r}{r-s} = r$

أو

$\frac{r}{r-s} = r$

وانفرض الآن المتعاقبتين r و s بالمتنقلة r والمعادلتين

$m = (r - s) = r^2 - s^2 + r$

$n = (r - s) = r^2 - s^2 + r$

فلتحصيل على المشتقتين $\frac{r}{r-s}$ و $\frac{s}{r-s}$ نعمل التفاضل فنجد

$\frac{r}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s}$

$\frac{r}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s}$

ومن هنا يحدث

$\frac{r}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s} = \frac{r}{r-s} + \frac{s}{r-s}$

$$\frac{\frac{26}{6ص} - \frac{6م}{6ص} - \frac{26}{6ص} - \frac{6م}{6ص}}{\frac{26}{6ط} - \frac{6ص}{6ط} - \frac{26}{6ط} - \frac{6م}{6ط}} = \frac{6ط}{6ص}$$

ليكن مثلاً

$$0 = 1 - ط + ص + م$$

$$0 = 1 - صط + صم + طم$$

فنجهد بغاية السهولة

$$\frac{6ص}{6ص} = \frac{(ص - ط) (ص + ط + م)}{(ص - ط + ص + م)}$$

$$\frac{6ط}{6ص} = \frac{(ص - ط) (ص + ط + م)}{(ص - ط + ص + م)}$$

(في المشتقات والتفاضلات ذات المراتب المختلفة للمتعلقات بمتغيرة واحدة)

٢٥. حيث ان مشتقة المتعلاقة $ص = م (ص)$ وهي $م (ص)$ متعلقة

أيضاً بالمتغيرة $ص$ (المطاب ٨) فيمكن ايجاد مشتقتها كما تقدم ويرمز لهذه

المشتقة الثانية بالرمز $م (ص)$ ويرمز لمشتقتها بالرمز $م (ص)$ وللمشتقة

الثالثة بالرمز $م (ص)$ وهلم جرا . ويقابل هذه المشتقات المتتالية

التفاضلات المتتالية فخذ اذا كان $ص = م (ص)$ وفرضنا ان $ص$

ثابت اختياري يحدث باخذ تفاضل كل من الطرفين

$$0.6 = (6ص) = [0.6 م (ص)] = م (ص) م (ص)$$

واذا رمزنا بالرمز $ص$ لتفاضل الثاني $0.6 (ص)$ يكون

$$ص = م (ص) م (ص)$$

وبهذه الطريقة نجد التفاضل الثالث أعني

$$ص = م (ص) م (ص)$$

وعلى العموم نجد تفاضل ذا المرتبة الزمنية وهو

$$\frac{d}{dx} m = \frac{d}{dx} (s)$$

ومن هذه المعادلات ينتج

$$\frac{d}{dx} m = \frac{d}{dx} (s) \quad \frac{d}{dx} m = \frac{d}{dx} (s) \quad \frac{d}{dx} m = \frac{d}{dx} (s)$$

$$\dots \quad \frac{d}{dx} m = \frac{d}{dx} (s)$$

وهي المشتقات المتتالية

(تطبيقات)

$$١. \text{ ليكن مثلاً } m = (s) \text{ فنجد}$$

$$\frac{d}{dx} m = (s)$$

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

.....

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

وهي المشتقة الأخيرة

وإذا فرضنا أن $s = \text{بصير } m = (s) = s$! أعني أن مقدار هذه المشتقة كمية ثابتة فتكون المشتقات اللاحقة معدومة

$$٢. \text{ انفرض } m = (s) \text{ فيكون}$$

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

$$\frac{d}{dx} m = (s) \quad \frac{d}{dx} m = (s)$$

.....
 $\overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) = \overset{\circ}{\text{و}} \overset{\circ}{\text{ع}} \overset{\circ}{\text{و}} \text{وهي المشتقة النونية}$

واذ جعلنا $\alpha = \text{و}$ يحدث

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

.....

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

ومن هنا ينتج ان

$$\overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) - \dots \dots \dots \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

أعني ان المتعلقة $\overset{\circ}{\alpha}$ ومشتقاتها كلها متساوية

$$٣. \text{ايكن } \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) = \overset{\circ}{\text{ا}} \overset{\circ}{\text{ع}} \overset{\circ}{\text{و}} \text{ فيحدث}$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر})$$

.....

$$\overset{\circ}{\text{م}} (\text{سر}) = \overset{\circ}{\text{و}} \overset{\circ}{\text{ع}} \overset{\circ}{\text{و}} (١ - \overset{\circ}{\text{و}}) \overset{\circ}{\text{ا}} \overset{\circ}{\text{ع}} \overset{\circ}{\text{و}}$$

فتأخذ العلامة + اذا كان ج عددا فردا والعلامة - اذا كان زوجا

واذا اعتبرنا الاوغار يتيم نبريانما نجد

$$م (س) = ل ع س$$

$$م (س) = \frac{1}{س}$$

$$م (س) = - \frac{1}{س}$$

$$م (س) = \frac{2}{س}$$

$$م (س) = - \frac{3}{س}$$

.....

$$م (س) = \frac{1}{س} \pm \frac{(1-2)}{س}$$

وتؤخذ العلامة كما سبق

٤. اذا فرضنا ان م (س) = ح س يوجد

$$م (س) = ح س \quad \text{جنا} \quad ح = س + \left(\frac{2}{س}\right)$$

$$م (س) = ح س \quad \text{ح} = س - \left(\frac{2}{س}\right)$$

$$م (س) = ح س \quad \text{جنا} \quad ح = س + \left(\frac{3}{س}\right)$$

$$م (س) = ح س \quad \text{ح} = س - \left(\frac{3}{س}\right)$$

.....

$$م (س) = ح س \quad \text{ح} = س + \left(\frac{2}{س}\right)$$

$$م (س) = ح س \quad \text{جنا} \quad ح = س$$

٥. واذا كان

$$م (س) = ح س \quad \text{ح} = س - \left(\frac{2}{س}\right)$$

$$م (س) = ح س \quad \text{جنا} \quad ح = س + \left(\frac{2}{س}\right)$$

$$\overset{||}{\text{م}} (\text{ر}) = \text{ط} = \text{ر} = \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ر}} \right)$$

.....

$$\overset{\text{ج}}{\text{م}} (\text{ر}) = \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ر}} \right)$$

٠٦ . لتكن المتعلقة الآتية

$$\overset{\text{مرجنا}}{\text{م}} (\text{ر}) = \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} \right)$$

فجد

$$\overset{\text{مرجنا}}{\text{م}} (\text{ر}) = \alpha \cdot \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} \right) - \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} \right)$$

$$\overset{\text{مرجنا}}{\alpha} = \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} \right)$$

$$\overset{\text{مرجنا}}{\text{م}} (\text{ر}) = \alpha \cdot \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^2} \right)$$

$$\overset{\text{مرجنا}}{\text{م}} (\text{ر}) = \alpha \cdot \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^3} \right)$$

$$\overset{\text{مرجنا}}{\text{م}} (\text{ر}) = \alpha \cdot \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^3} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^4} \right)$$

.....

$$\overset{\text{ج}}{\text{م}} (\text{ر}) = \alpha \cdot \text{جنا} \left(\text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^3} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^4} + \frac{\text{ر}}{\text{ط}^5} \right)$$

(في قانون لايفنغس)

٠٢٦ . فائدة هذا القانون سهولة استخراج التفاضلات المتتابعة المتعاقبة هي

حاصل ضرب متعلقين

لنكن u و v متعلقين بالمستقلة x فيكون

$$u \cdot v = (uv)$$

$$u^2 \cdot v = (uv^2) + u^2 \cdot v + u^2 \cdot v$$

$$u^3 \cdot v = (uv^3) + u^2 \cdot v^2 + u^2 \cdot v^2 + u^3 \cdot v$$

وينتج قياسا على هذا

$$(1) \quad u^n \cdot v = (uv^n) + u^{n-1} \cdot v^2 + \frac{(n-1)u^{n-2} \cdot v^3}{2!} + \dots +$$

$$\frac{(n-1)(n-2) \dots (2) u^{n-2} \cdot v^3}{3!} + \dots +$$

$$u^n \cdot v + \dots +$$

وهذا هو القانون المذكور ومنه

$$\frac{u^n \cdot v}{n!} = \frac{(uv^n)}{n!} + \frac{u^{n-1} \cdot v^2}{(n-1)!} + \frac{u^{n-2} \cdot v^3}{(n-2)!} + \dots + \frac{u^n \cdot v}{n!}$$

وهي مشتقة حاصل ضرب (صط) النونية

وابيان ان القانون (١) يطرد في جميع الحالات التي يفرض فيها غير المقدار

u يكفي أن يفرض المقدار $u + 1$ ونبحث عما يؤهل اليه هذا القانون

فبأخذ تفاضل كل من الطرفين نجد

$$\frac{u^{n+1} \cdot v}{(n+1)!} = \frac{(uv^{n+1})}{(n+1)!} + \frac{(u^{n+1} \cdot v^2)}{(n+1)!} + \frac{(u^n \cdot v^3)}{(n+1)!} + \dots +$$

$$\frac{(1-u)u^n \cdot v^3}{3!} + \dots +$$

$$ط_6^1 = \alpha^1 \cdot \alpha^1$$

$$ط_6^2 = \alpha^2 \cdot \alpha^2$$

$$ط_6^3 = \alpha^3 \cdot \alpha^3$$

.....

$$ط_6^n = \alpha^n \cdot \alpha^n$$

و بموجب قانون لايبنتس يحدث

$$ط_6^m = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^1 + 1 \right)$$

$$+ (1 - \alpha) \left(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^1 + 1 \right)$$

وهو المطلوب

٢٧. في بعض الاحيان يلزم معرفة المشتقات المتوالية للمعاني المستقلة

وامقادار معين ولا سيما المقدار صغير وهالك مثلا ذلك

يمكن $\alpha = 0$ فوجبا α فيكون

$$\frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha}$$

ومن هنا

$$= \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha}$$

فاذا اخذنا المشتقة الاولى رتبها ١ - ١ لا كميتين (١ - α) $\frac{1}{\alpha}$

و α بموجب قانون لايبنتس نجد

$$(1 - \alpha) \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \alpha)^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha^2}$$

$$= \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha) - \frac{1}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} (1 - \alpha) - \frac{1}{\alpha}$$

$$٠٢ ص = جناسر \quad \text{المطلوب} \quad \text{الجواب} \quad ٦ ص = ٢ = ١ - ٥ \times$$

$$\text{جنا} \quad (٢س + ٥) \quad ٦ ص$$

$$٠٣ ص = \frac{١+س}{١-س} \quad \text{المطلوب} \quad \text{الجواب} \quad ٦ ص = ٢ \times$$

$$\frac{٥(١-٥) + ٣٠٠٠(١-٥) \times ١}{١ \times ٥(١-س)}$$

$$٠٤ ص = \text{قوتاسر} \quad \text{المطلوب} \quad \text{قوتاسر} \quad \frac{١}{١+س} = \frac{١}{٦ ص} \quad \text{ثم نجعل}$$

$$س = طنا ه فيكون \frac{١}{٦ ص} = - ح ه \quad \text{و} \quad \frac{١}{٦ ص} = ح ه$$

$$\text{ومنهما} \quad \frac{١}{٦ ص} = - ح ه \quad ٢ ه \quad \text{و} \quad \frac{١}{٦ ص} = ٢! ح ه \quad ٣ ه$$

$$\dots \text{واخيرا} \quad \frac{١}{٦ ص} = (١-٥)(١-٥) \dots! ح ه \quad ٢ ه = (١-٥) \times$$

$$\frac{١}{٢(١+س)} \quad \text{ح} \quad (٥ \text{ قوتاسر}) \quad \text{وهو الجواب}$$

(ج) لتطبيق قانون لايننس

$$٠١ ص = س(١-س) \quad \text{المطلوب} \quad ٦ ص$$

$$\text{الجواب} \quad ٦ ص = (١-س)! (١-س) - ١ \left(\frac{١}{١} \right) \frac{١}{١-س}$$

$$+ \left(\frac{١}{١-س} \right) \left(\frac{(١-٥)٥}{١!} \right) +$$

$$- \left(\dots + \left(\frac{١}{١-س} \right) \left(\frac{(٢-٥)(١-٥)٥}{١!} \right) \right)$$

$$٠٢ ص = \text{قوتاسر} \quad \text{المطلوب} \quad \text{المشتقة ذات المرتبة النونية بفرض} \quad س =$$

$$\text{الجواب} \quad \left(\frac{١+٥}{١+٥} \right) = (١-٥) \quad \text{!} \quad \text{اذا كانت زوجية}$$

و إذا كانت ϕ فردية $\cdot = \left(\frac{1+\phi}{1+\phi} \right) \cdot = \cdot$

• (في المشتقات المتتابعة للمتعلقات المضمرة) •

٢٨ لإيجاد المشتقات المتتابعة للمتعلقة ϕ الميئة بالمعادلة

$$\phi = (\phi \phi) \cdot = \cdot \quad (1)$$

نأخذ المشتقة الأولى فيحدث

$$\cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} - \frac{\phi}{\phi}$$

$$\text{أو} \quad \cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} \quad (2)$$

ومنه يستخرج مقدار ϕ لكنه يشغل على ϕ و ϕ فإذا أريد أن لا يحتوى الأعلى ϕ فقط نجما ϕ من المعادلتين (١) و (٢) ونحل المعادلة الناتجة

بالنسبة إلى ϕ فينتج المطلوب

ولتحصيل على المشتقة الثانية ϕ نكتب المعادلة (٢) على هذه الصورة

$$\phi = (\phi \phi \phi) \cdot = \cdot$$

فيأخذ المشتقة باعتبار ϕ و ϕ متعلقين بالتغير ϕ يحدث

$$\cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} - \frac{\phi}{\phi} - \frac{\phi}{\phi}$$

$$\text{أو} \quad \cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} \quad (3)$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار ϕ . ولأجل أنه لا يحتوى على غير ϕ

نجا ϕ و ϕ من المعادلات (١) و (٢) و (٣) وكذا كي يستقر العمل

$$\phi = \phi - \phi$$

ليكن مثلا

$$\phi = \phi + \phi$$

فيكون

$$\phi = \phi + \phi$$

$$\frac{3}{\text{سر}} + \frac{1}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}}$$

ومنها

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}$$

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}} = \frac{3}{\text{سر}}$$

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{3}{\text{سر}} = \frac{3}{\text{سر}} \times 2 = \frac{6}{\text{سر}}$$

وبوضع $\frac{3}{\text{سر}}$ عرضا عن سر يحدث

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}$$

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}$$

$$\frac{3}{\text{سر}} = \frac{4}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}} = \frac{3}{\text{سر}} \times 2 = \frac{6}{\text{سر}}$$

وهكذا

• (في تبديل المتغيرة المستقلة) •

٢٩ • قد فرضنا في المطلب ٢٥ ان تفاضل المتغيرة سر وهو $\frac{6}{\text{سر}}$ كمية ثابتة فاذا كانت سر متعلقة بالمتغيرة ط بحيث تكون $\text{سر} = \text{م} (\text{ط})$ (١) وأريد ايجاد مشتقات سر المتداخلة بالنسبة الى هذه المستقلة الجديدة نضع $\text{م} (\text{ط})$ عرضا عن سر في المعادلة $\text{سر} = \text{م} (\text{سر})$ ثم نجري العمل مثل ما تقدم ويمكن ايجاد المطلوب بغير ما ذكرناه وان يؤخذ تفاضلات المعادلة الاخيرة باعتبار ان سر متعلقة بمتعلقة فيحدث

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{\text{سر}} &= \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} \\ \frac{6}{\text{سر}} &= \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} + \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} \\ \frac{6}{\text{سر}} &= \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} + \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} + \text{م} (\text{سر}) \frac{6}{\text{سر}} \end{aligned} \right\} (٢)$$

وباختلافات المعادلة (١) نجد

$$g_6(g)^{-1} = g_6$$

$${}^2_6\text{ط} = {}^2_6\text{م}(\text{ط})$$

$${}^r\mathcal{G}(\mathcal{G})^{\equiv} {}^r\mathcal{G}$$

فاذا وضعنا بدلا عن $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$... الخ في المعادلات (٢) ما ساواها في
المعادلات الأخيرة ثم قسمنا طرفي كل معادلة على $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$... الخ فنجد

$$\frac{6}{16} = \bar{m} \text{ (سر)} \bar{r} \text{ (ط)}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3} = m^2(s) m^2(t) + m^3(s) m^2(t) + m^2(s) m^2(t) =$$

و بوضع آخر نجد

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \quad \dots (2)$$

$$\frac{2}{16} = \frac{2}{16} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{16} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{1}$$

وهو المطلوب

۳۰. لیکن $\epsilon = m$ (مردود و $\frac{m}{3}$ و $\frac{m}{6}$ و \dots) (۱)

معادلة تحتوي على r و r مشتقات r المتابعة بالنسبة الى r فاذا
اريد تبديل r في هذه المعادلة بتغيره بـ r ط r نقطة بالتغيره r بمعادلة

مثل م = م (ط) والمشتقات $\frac{م}{م}$ $\frac{م}{م}$ $\frac{م}{م}$... بمشتقات

ص بالنسبة الى ط يكفى ان نحل المعادلات (٣) بالنسبة الى $\frac{6}{6}$ و $\frac{6}{6}$ و $\frac{6}{6}$

١٧ ، ثم نضع مقاديرها في المعادلة (١).

ويمكن ايجاد هذه المقادير بواسطة القانون

$$\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ط}$$

لانه ينتج منه

$$(٤) \quad \frac{\left(\frac{ص}{ط}\right)}{\left(\frac{ص}{ط}\right)} = \frac{ص}{ص}$$

فباخذ المشتقة بالنسبة الى ط يكون

$$\frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{\left(\frac{ص}{ط}\right)^2} = \frac{ص}{ط}$$

ومنها

$$(٥) \quad \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{\left(\frac{ص}{ط}\right)^3} = \frac{ص}{ط}$$

وباخذ مشتقة هذه المعادلة فنجد

$$\frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \left(\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}\right)}{\left(\frac{ص}{ط}\right)^3} = \frac{ص}{ط}$$

$$(٦) \quad \frac{\frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط}}{\left(\frac{ص}{ط}\right)^4}$$

وعلم برا .

اتمكن من المعادلة

$$(١ - ص) \cdot \frac{ص}{ط} - ص \cdot \frac{ص}{ط} + ص = ص$$

فاذا اردت تحويلها الى معادلة اخرى لا تحتوى الاعلى ص وتغير جديده

ط بفرض ان ص = جنا ط نقول

$$\frac{ص}{ط} = - حا ط و \frac{ص}{ط} = - جنا ط$$

فيوضع هذين المقدارين في القانونين (٤) و (٥) فنجد

$$\frac{ص}{ص} = \frac{١}{حا ط} - \frac{ص}{ط}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{١}{حا ط} - \frac{ص}{ط} - جنا ط$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة $س = جتا ط$ تؤل المعادلة المفروضة الى

وهو المطلوب $\frac{ص}{ط} + \frac{ص^2}{ط^2} = ١$.
وكذلك اذا كانت

$$\frac{ص}{ط} + \frac{ص^2}{ط^2} = ١ \quad \text{و } س = جتا ط \text{ فنجد}$$

$$\frac{ص}{ط} + \frac{ص^2}{ط^2} = ١$$

٣. واذا اريد اخذ $ص$ متغيره مستقلة فنجعل $ص = ط$ فتؤل لقوانين (٤) و (٥) و (٦) الى

$$(٤) \quad \frac{١}{ص} = \frac{ص}{ط}$$

$$(٥) \quad \frac{\frac{ص}{ط} - \frac{ص^2}{ط^2}}{\frac{ص}{ط}} = \frac{ص}{ط}$$

$$(٦) \quad \frac{\frac{ص}{ط} - \frac{ص^2}{ط^2} - \frac{ص^3}{ط^3}}{\frac{ص}{ط}} = \frac{ص}{ط}$$

لتكن مثلاً المعادلة

$$[١ + \left(\frac{ص}{ط} \right)^2] + \frac{ص}{ط} (٣ - ص) = \frac{ص}{ط}$$

وانبحث عما تؤل اليه اذا جعلنا $ص$ المتغيرة المستقلة ولذلك نستعمل القانونين (٤) و (٥) فنجد

$$١ + \left(\frac{ص}{ط} \right)^2 - \frac{ص}{ط} (٣ - ص) = \frac{ص}{ط}$$

(تمرينات)

١. المفروض $س = جتا ط$ والمطلوب تبديل $س$ بالمتغيرة $ط$ في المعادلة

$$س^2 + \frac{ص}{ط} س + \frac{ص^2}{ط^2} = ١$$

الجواب $\frac{6}{\alpha} + (1 - \alpha) \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = 0$

٢. المقروض $\alpha = \alpha + \alpha$ والمقام تبديل α بالمتغيرة α في

$$(\alpha + \alpha) \frac{6}{\alpha} + (\alpha + \alpha) \frac{6}{\alpha} + (\alpha + \alpha) \frac{6}{\alpha} = 0$$

$$\alpha = \alpha + \frac{6}{\alpha}$$

الجواب $\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = 0$

٣. اجعل α المتغيرة المستقلة في

$$\frac{6}{\alpha} - \frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = 0$$

الجواب $\frac{6}{\alpha} - \alpha + \frac{6}{\alpha} = 0$

٤. المقروض $\alpha = \alpha + \alpha$ [$\frac{1}{\alpha} (\alpha + 1) + \alpha$] والمطلوب تبديل α الى α في

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{6}{\alpha}$$

الجواب $\frac{6}{\alpha} + \frac{6}{\alpha} = \alpha + \alpha$

الباب السادس

(تطبيقات جبرية)

نسبة زبادتي متعلقتين

بمتغيرة واحدة

٣٢. لتكن المتعاقبة $\alpha = \alpha$ (م) متغيرة تصاعدا او تنازلا بين

النهائيتين α و $\alpha + \alpha$ ومن المعلوم ان

$$\alpha = \alpha + \alpha - \alpha \quad (1)$$

ثم امكن (م) متعلقة بالمتغيرة α ولنفرض ان مشتقتها α (م) تكون محدودة مستمرة بين النهايتين α و $\alpha + \alpha$ ف α فيوجب با

فلتاه في المااب يكون

$$\text{م} (\text{ص} + \text{ف} \text{ ص}) - \text{م} (\text{ص}) = \frac{\text{م} (\text{ص} + \text{ف} \text{ ص})}{\text{ف} \text{ ص}} \quad (٢)$$

فرض ع عددا محه ورا بين الصفر والواحد

فاذا وضعنا $\text{م} (\text{ر})$ عوضا عن ص في $\text{م} (\text{ص})$ ورمزنا بالرمز $\text{ع} (\text{ر})$ للمتعلقة ر الناتجة من هذا التبديل يحدث

$$\text{م} (\text{ص}) = \text{ع} (\text{ر}) \quad (٣)$$

وحينئذ يكون

$$\text{م} (\text{ص} + \text{ف} \text{ ص}) = \text{ع} (\text{ر} + \text{ف} \text{ ر})$$

فاذا اخذنا مشتقى طرفي المعادلة (٣) باعتبار ان $\text{م} (\text{ص})$ متعلقة بمتعلقة نجد

$$\text{م} (\text{ص}) \text{ م} (\text{ر}) = \text{ع} (\text{ر})$$

$$\frac{\text{ع} (\text{ر})}{\text{م} (\text{ر})} = \text{م} (\text{ص})$$

ومنه

وحيث فرضنا ان ص تتغير مع اعداد ا و ب بين النهايتين و و ر + ف فاذا زادت هذه المتعلقة بالزيادة ع ف ص المحصورة بين ف و ص و ا و ب تزيد ايضا المتعلقة ر بزيادة مثل ع ف ص محصورة كذلك بين ف و ص والصفر (بفرض $\text{ع} \leq \text{ا}$) ويحدث

$$\text{م} (\text{ص} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ص}) = \frac{\text{ع} (\text{ر} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ر})}{\text{م} (\text{ر} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ر})} \quad (٤)$$

وبعض ص من المعادلة (٢) بواسطة (١) و (٣) و (٤) نجد

$$\text{ع} (\text{ر} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ر}) - \text{ع} (\text{ر}) = \frac{\text{ع} (\text{ر} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ر})}{\text{م} (\text{ر} + \text{ع} \text{ ف} \text{ ر})} \quad (٥)$$

ولملاحظ انه يلزم لاجل أن تكون $\text{م} (\text{ص})$ مستمرة بين النهايتين و و ر

+ ف ص أن تكون المشتقتان $\text{ع} (\text{ر})$ و $\text{م} (\text{ر})$ مستمرتين وزيادة على ذلك

انه لاتنعدم اثنائية بين r و $r + f$ و هذا الفرض ممكن دائما اذا
اخذ f صغيرا صغرا كافيا

٣٣. اذا فرضت الكمية المعينة r مقدارا للمتغيرة r وفرض ان

$$r = (r) \quad \text{و} \quad m = (r)$$

وجهل لاجل الاختصار $f = r$ و $r = f$ (فاذا تكون

$r < m$) لاكت المعادلة (٥) لي

$$\frac{r + (r)}{m + (r)} = \frac{r + (r)}{m + (r)}$$

فاذا فرض ان $r = (r)$ و $m = (r)$ مع الفرض بان

$r = (r)$ و $m = (r)$ كيتان محدودتان لاتنعدم ثابتهما بين
 r و $r + f$ فينتج كما تقدم

$$\frac{r + (r)}{m + (r)} = \frac{r + (r)}{m + (r)}$$

بقرض $r > m$

ومن هذه المعادلة وساقم يحدث ان

$$\frac{r + (r)}{m + (r)} = \frac{r + (r)}{m + (r)}$$

وعلى ما ذكر فينتج على وجه عام ان

$$(7) \quad \frac{r + (r)}{m + (r)} = \frac{r + (r)}{m + (r)}$$

بشرط أن جميع مشتقات \bar{r} (س) و \bar{m} (س) المتتابعة ماعد النونية
تتعدم بجعل $r = 0$ وانها بما فيها النونية تكون مستقرة بين r و $r + 1$
فإذا فرضنا مثلا أن \bar{m} (س) = $(r - 0) \bar{r}$ نرى
أن جميع المشتقات ماعد النونية تتعدم بجعل $r = 0$ وأن النونية
تكون

$$\bar{m} (r) = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times \dots \times 5$$

فتقول الحالة (٦) الى

$$(7) \quad \bar{r} (r + 0) = \frac{\bar{r} (r)}{1} = (r + 0) \bar{r}$$

وبفرض $0 = 0$ يحدث

$$(8) \quad \bar{r} (r) = \frac{\bar{r} (r)}{1} = (r) \bar{r}$$

• (في المقدار الحقيقي للمتغيرات ذات الصورة (٦)) •

٣٤. المفروض أن الكمية $\frac{\bar{r} (r)}{\bar{m} (r)}$ تأخذ الصورة \bar{r} إذا جعلنا فيها
 $r = 0$ والمطلوب إيجاد المقدار الذي تقرب منه هذه الكمية حين ما تقرب
 r من 0 أعني إيجاد المقدار المعنى بالمقدار الحقيقي وذلك فجعل $r = 0$
+ فنجد بموجب القانون (٦)

$$\frac{\bar{r} (r + 0)}{\bar{m} (r + 0)} = \frac{\bar{r} (r)}{\bar{m} (r)}$$

وكما قربت r من 0 صغرت r وعند النهاية يصير

$$\frac{\bar{r} (r)}{\bar{m} (r)} = \frac{\bar{r} (r)}{\bar{m} (r)}$$

فإذا كانت المشتقتان \dot{Q} و \dot{M} (ح) غير معدمتين وغير لائيتين

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}} \text{ كانا قدر الحقيقى هو } \frac{\dot{Q}}{\dot{M}}$$

أما إذا كانت \dot{Q} (ح) = 0 و \dot{M} (ح) = 0 يحدث

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}} \text{ } \frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}}$$

وعلى العموم إذا كانت \dot{Q} (ح) و \dot{M} (ح) هما أول مشتقتين لا تنعدمان
فإن واحد بفرض $\dot{Q} = \dot{M}$ يكون

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}} \text{ } \frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}}$$

فيكون حينئذ

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}}$$

والمقدر الحقيقى يكون صفرا إذا كانت \dot{Q} (ح) = 0 ويكون لائيا

إذا كانت \dot{M} (ح) = 0

(أمثلة)

١- إذا فرض أن

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{M}}$$

يقول الطرف الثانى إلى : يجعل $\dot{Q} = \dot{M}$ فإذا أخذنا مشتقتى البسط

والمقام يحدث

$$\frac{\text{قر (س)}}{\text{م (س)}} = ٣ \text{ سر}$$

$$\frac{\text{قر (س)}}{\text{م (س)}} = ٣ \text{ سر}$$

ومنه

وهو المطلوب

$$\frac{\text{قر (س)}}{\text{م (س)}} = \frac{\alpha - 1}{\text{ح س}}$$

٢. ليكن

١. افرضنا ان $\text{سر} = ٠$. ياخذ الطرف الثاني الصورة : فنجد

$$\frac{\text{قر (س)}}{\text{م (س)}} = \frac{\alpha - 1}{\text{ح س}} = ١ - \frac{\alpha}{\text{ح س}}$$

٣. بفرض ان $\text{سر} = \frac{١}{٢}$ نجد

$$\frac{\text{قر (س)}}{\text{م (س)}} = \frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} (\alpha - \frac{١}{٢})}{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} (\alpha - \frac{١}{٢})} = \frac{١}{٢} \text{ غا}$$

(تقرينات)

$$\frac{\text{سر}^٣ - ٤ \text{ سر}^٢ + ٥ \text{ سر} - ٢}{\text{سر}^٣ - ٣ \text{ سر}^٢ - ٢ \text{ سر}} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}^٣ - ٣ \text{ سر}^٢ - ٢ \text{ سر}}$$

$$\text{سر} = ٢ \text{ (الجواب) المقدار الحقيقي م} = \frac{١}{٩}$$

$$\frac{\text{سر}^٢ - ٢ \text{ سر}}{\text{ح س}} = \frac{\text{سر}}{\text{ح س}} = \frac{\text{سر}}{\text{ح س}} = \frac{\text{سر}}{\text{ح س}} = \frac{\text{سر}}{\text{ح س}}$$

$$\frac{\text{سر} (١ + \alpha) - (١ - \alpha) \text{ سر}}{\text{سر} (١ - \alpha)} = \frac{\text{سر}}{\text{سر} (١ - \alpha)} = \frac{\text{سر}}{\text{سر} (١ - \alpha)}$$

$$\frac{\text{سر}}{\text{سر} (١ - \alpha)} = \frac{\text{سر}}{\text{سر} (١ - \alpha)}$$

المشتقتين $\frac{م}{سر}$ و $\frac{م}{سر}$ اما اذا كانت $م$ $\frac{م}{سر}$ أى المقدار
الحقيقى لانها ثبات يكون $\frac{م}{سر} = 0$

فحينئذ كان تقدم $\frac{م}{سر} = 0$

وعليه $\frac{م}{سر} = \infty$

ففى كل الحالات يكون $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ (أمثلة)

١. اذا فرض ان $سر = 0$ يكون $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{ظنا(سر)}$

فحينئذ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{ظنا(سر)}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{ظنا(سر)}$

وحيث ان النهاية الاخيرة تؤلى الى $\frac{ل}{سر}$ يحدث

$\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{ظنا(سر)}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{ظنا(سر)}$

٢. اذا فرض ان $سر = \infty$ يكون $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$ فحينئذ

$\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$ $\frac{ل}{سر} = \frac{ل}{سر}$

٣. بفرض ان $سر = \infty$ فنجد

$$\frac{\left(\frac{ل}{سر}\right)}{\left(\frac{ل}{سر}\right)} = \frac{\left(\frac{ل}{سر}\right)}{\left(\frac{ل}{سر}\right)} = \frac{\left(\frac{ل}{سر}\right)}{\left(\frac{ل}{سر}\right)} = \frac{\left(\frac{ل}{سر}\right)}{\left(\frac{ل}{سر}\right)} = \frac{\left(\frac{ل}{سر}\right)}{\left(\frac{ل}{سر}\right)}$$

فيكون المقدار الحقيقي $\alpha = \frac{1}{s} (1 + s)$ ما

٢. ليكن s وانه فرض $s = 0$. فنجبداً أولاً $\text{لع } s = 0$ $\text{لع } s$ وحيث ان نهاية هذا اللوغاريتم صفر يكون

$$s = 1$$

٣. ليكن $\left(\frac{1}{s}\right)$ بفرض $s = 0$. فنجبداً أولاً $\text{طا } s = 0$ $\text{لع } s$ (نفس)

او $\frac{\text{طاس}}{[\text{لع } (\frac{1}{s})]}$ وباخذ مشتق البسط والمقام يحدث

$$\frac{\frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{s} \right)} = \frac{\left(\frac{1}{s} \right)}{\left(-\frac{1}{s^2} \right)}$$

فاذا يكون

$$0 = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \text{ ما}$$

والمقدار الحقيقي المطلوب

$$s = \left(\frac{1}{s} \right) \text{ ما}$$

(تمزيقات)

$$١. s = \frac{1}{s} \text{ بفرض } s = \infty \text{ الجواب } s = 1$$

$$٢. \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \text{ بفرض } s = \infty \text{ الجواب } s = 1$$

$$s = 1$$

ظنا سر ∞

$$٠٣. (ظنا سر) = ١ = \text{بفرض سر} = \frac{١}{٢} = \text{الجواب م} = \frac{١}{\infty}$$

$$٠٣٨. \text{اذا كان سر} (سر) = \infty \text{ و م} (سر) = \infty \text{ بفرض}$$

$$\text{سر} = \infty \text{ ياخذ الفرق سر} (سر) - \text{م} (سر) \text{ الصورة غير المعينة}$$

$$\infty - \infty \text{ فلايجاد مقدار الحقيقي فنحول للمتعلقين المذكورين}$$

مقاما مشتركا - في ياخذ الفرق الصورة $\frac{1}{\text{سر}}$ ثم يجري العمل كما تقدم

$$\text{ليكن مثلا سر} (سر) = \frac{١}{\text{سر}} \text{ و م} (سر) = \text{ظنا سر} \text{ فاذا فرضنا}$$

$$\text{سر} = ٠ \text{ فنجد}$$

$$\text{سر} (سر) - \text{م} (سر) = \frac{١}{\text{سر}} - \text{ظنا سر} = \infty - \infty \text{ واذا يكون}$$

$$\text{سر} \left(\frac{١}{\text{سر}} - \text{ظنا سر} \right) = \frac{\text{سر} \text{ جا سر} - \text{سر جتا سر}}{\text{سر جا سر}}$$

$$\text{سر} = \frac{\text{سر جا سر}}{\text{سر جا سر} + \text{سر جتا سر}}$$

(تقريرات)

$$٠١. \frac{٢ + \text{جتا سر}}{\text{سر}^٢ \text{ جا سر}} - \frac{٣}{\text{سر}} = \infty - \infty \text{ بفرض سر} = ٠$$

$$\text{الجواب م} = \frac{١}{٦}$$

$$٠٢. \infty - \infty = \frac{\frac{٢}{\text{سر}^٢} + \frac{١ - \text{سر}^٢}{\text{سر}^٢}}{\left(\frac{٢}{\text{سر}^٢} - \frac{١ - \text{سر}^٢}{\text{سر}^٢} \right)} = \infty \text{ بفرض سر} = ٠$$

$$\text{الجواب م} = \frac{٢}{٦}$$

$$٠٣. \frac{١}{\text{سر}} - \text{ظنا سر} = \infty - \infty \text{ بفرض سر} = ٠$$

$$\text{الجواب م} = \frac{٢}{٦}$$

$$٠٣٩. \text{في بعض الاحيان نسبة مشتقات سر} (سر) \text{ و م} (سر) \text{ تكون}$$

$$\text{دائما} \frac{\infty}{\infty} \text{ بفرض سر} = ٠ \text{ فاذا اريد ايجاد المقدار الحقيقي بواسطة}$$

$$\frac{1}{2} : 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$$

$$1 : 2 : 3 : 4 : \dots$$

ومن العلوم ان حاصل جمع حدودها الاولى التي عددها n هو

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

فاذا فرض ان n اقل من الواحد فان $\frac{n}{2}$ يقرب من $\frac{1}{2}$ كلما
ازداد n واذا كانا كبرتهما أو مساويا له فبكبر $\frac{n}{2}$ ويصير لائما

٤١ . وانخذ كبر بعض نظريات ناتجة من مقابلة متسلسلة بمقابلة هندسية
فتقول

(النظرية الاولى) المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون غائبة اذا كانت
نسبة أي حد من الحدود الى نسبة بعدده معلوم الى ما قبله أصغر من كمية
مفروضة اقل من الواحد
مثلا في المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

ذات الحدود الموجبة اذا فرض انه من ابتداء الحد العام يكون

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} \text{ و } \frac{1}{2} > \frac{1}{n} \text{ (يفرض } n > 1 \text{)}$$

تكون هذه المتسلسلة غائبة

برهانه ان يقال من المتباينات السابقة ينتج ان

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots$$

ومن هنا

$1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots$
 فالأطراف الثانية من هذه المتباينات الأخيرة تكون هذه المتوالية الهندسية

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2} : \frac{1}{n+3} : \frac{1}{n+4} : \dots$$

التي أسماها $\frac{1}{n}$ وحاصل جمعها $\frac{1}{n-1}$ ويشاهد حينئذ أن حدود المتسلسلة

المفروضة من ابتداء الحد $\frac{1}{n}$ أصغر من حدود هذه المتوالية وبذا يكون حاصل جمع حدود المتسلسلة وهو $\frac{1}{n-1}$ منحصرا بين $\frac{1}{n}$ (حاصل جمع حدود

المتسلسلة التي قبل $\frac{1}{n}$) و $\frac{1}{n-1}$ وحينئذ تكون المتسلسلة

غائية وهو المطلوب أما في حالة العكس أعني إذا كانت النسب المذكورة أكبر من الكمية $\frac{1}{n}$ (يفرض $n < 1$) فالمتسلسلة تكون غير غائية لأنه في هذه الحالة تأخذ الحدود $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$ في التماعد وتصبح أكبر من حدود المتوالية الهندسية التصاعدية

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2} : \frac{1}{n+3} : \frac{1}{n+4} : \dots$$

التي لانهاية لحاصل جمعها

(النظرية الثانية) إذا فرض في المتسلسلة ذات الحدود الموجبة

$$a, r, r^2, r^3, r^4, \dots$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \frac{1}{n+4} > \dots$$

($\frac{1}{n}$ كمية أقل من الواحد) تكون المتسلسلة المذكورة غائية

لأنه ينتج من المفروضات أن

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \frac{1}{n+4} > \dots$$

حينئذ يكون

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots$$

وحيث أن الطرف الثاني (الذي هو متوالية هندسية) يساوي $\frac{1}{n-1}$ فيكون

حاصل جمع المتسلسلة أقل من هذه الكمية المحدودة وحينئذ تكون غائية وهو المطلوب

واذا كانت الجذور المذكورة أكبر من \sqrt{u} (بقدر $u < 1$) فالمسلسلة
تكون غير غائبة

(النظرية الثالثة) اذا كانت حدود المسلسلة الايجابية بعد الحد q موجبة
وسالبة على التعاقب وتنقص كلما زاد عدد هذه الحدود وتكون المسلسلة
غائبة

$$\text{لنكن المسلسلة } \dots - q^2 + q^3 + q^4 - q^5 + q^6 + q^7 - \dots$$

فاذا فرضنا

$$\begin{aligned} q^p &= q^j \\ -q^p &= 1 + q^j - \\ -q^p &= 2 + q^j - \dots \end{aligned}$$

يكون

$$\begin{aligned} q^p + q^p + q^p + \dots + (q^p - q^p) + \dots \\ = q^p - (q^p - q^p) - (q^p - q^p) - \dots \\ \text{وحيث فرضنا } q^p < 1 + q^p < 2 + q^p < \dots \end{aligned}$$

تكون الطروح $(q^p - 1)$ و $(q^p - 2)$ الخ
كلها موجبة ومن هذا ينتج ان حاصل جمع المسلسلة المفروضة كمية موجبة
أصغر من q^p وحيث ان يكون هذا الحاصل محصورا بين q^p و $q^p + q^p$
فهى غائبة وهو ما أردنا تبينه

(النظرية الرابعة) اذا تفاقت حدود المسلسلة

$$q, r, q, r, q, r, \dots$$

من ابتداء الحد الاول فهى تابعة لهذه المسلسلة (١)

$$q, r, q, r, q, r, q, r, q, r, \dots$$

لانه لو وضعنا حاصل جمع حدود المسلسلة الاولى بهذه الصورة

$$q + (q + r) + (q + r + q) + (q + r + q + r) + \dots$$

(١) اعني انه اذا كانت احدها غائبة تكون الاخرى غائبة ايضا وبالعكس

ولاحظنا ما فرضناه من تناقص الحدود ولحدث

$$\begin{aligned} q_1^2 &> q_1 + q_2 \\ q_3^4 &> q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \\ q_7^8 &> q_1^4 + \dots + q_7^4 \end{aligned}$$

فيكون

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_7 + q_8 + q_9 + \dots > q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_7^2 + q_8^2 + q_9^2 + \dots$$

وبوضع حاصل الجمع لحدود التسلسلة المقروضة بمذه الكيفية

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_7^2 + q_8^2 + q_9^2 + \dots) + (q_1^4 + q_2^4 + q_3^4 + \dots + q_7^4 + q_8^4 + q_9^4 + \dots)$$

وابراء العمل كما سبق نجد

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_7 + q_8 + q_9 + \dots < q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_7^2 + q_8^2 + q_9^2 + \dots$$

أو

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_7 + q_8 + q_9 + \dots < q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_7^2 + q_8^2 + q_9^2 + \dots$$

ويظهر من هاتين المتباينتين ان غاية احدى التسلسلتين تقتضي غاية الاخرى
وغير غائية اجداهما كذلك

(أمثلة لتطبيق ما سبق)

١. لتكن التسلسلة

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

التي حدها العام $q_n = \frac{1}{n^s}$ والحد التالي له $\frac{1 + 2^s}{(1 + 2)^s}$ فالنسبة

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1+2^s}{2^s}$$

واذا فرضنا $s > 1$ لا كبر عدد صحيح بحيثوى عليه s نجد $\frac{1}{2+1} > 1$

وبمقتضى النظرية الاولى تكون التسلسلة غائية

واذا فرضنا $s = 1$ فنحدث التسلسلة

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

وقد سبق الكلام عليها

٢. المتسلسلة

$$1 - \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1} - \frac{r^3}{1} + \frac{r^4}{1} - \dots$$

نكون بموجب النظرية الثانية إذا كان $r > 1$ أو $r = 1$

٣. إذا فرض في المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \dots$$

أن $r > 1$ عدده موجب نجد

$$\frac{1}{r^2(1 + \frac{1}{r})} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{r}} \right) = \frac{1 + \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}}$$

وهذه النسبة تعادل الواحد فلا يمكن أن تدبنا النظرية الأولى عن غاية المتسلسلة ويمكن لو حفظ ما قبل في النظرية الرابعة وأخذت المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \dots$$

$$\text{أو } 1 + \frac{1}{1 - r^2} + \frac{1}{1 - r^2} + \frac{1}{1 - r^2} + \dots$$

لحدث متوالية هندسية أساسها $\frac{1}{1 - r^2}$ فالمتسلسلة تكون غائية إذا كان

$$\frac{1}{1 - r^2} > 1 \text{ أو } r < 1 \text{ وغير غائية إذا كان } r > 1 \text{ أو } r = 1$$

فنتج من هذا أن المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \dots$$

غير غائية

الباب الثامن

في متسلسلة تيلور (١)

(١) ولد في الانجليز في سنة ١٦٣٥ ومات سنة ١٧٢١

٤١ • افترض المتعلاقة s^r وان r عدد صحيح موجب فاذا زادت s المقدار r يحدث مقتضى قانون نيوتون

$$(s + r) = s + r + \frac{s^2 - r^2}{2!} + \frac{s^3 - r^3}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{s^4 - r^4}{4!} + \dots$$

وبالمشاهدة نجد ان s^r و $r^r (1 - r)^{r-1}$

هي مشتقات s^r المتتابعة فيجعل $s^r = m (s)$ تول المتساوية السابقة الى

$$m (s + r) = m (s) + \frac{m (s)}{1} + \frac{m (s)}{2!} + \frac{m (s)}{3!} + \dots$$

$$m (s) + \dots (1)$$

وحيث ان المشتقات ذات المراتب العالية عن r معدومة فهذه المتسلسلة تنتهي الى الحد ذي المرتبة $r + 1$

وانبرهن على انه مهما افترضت المتعلاقة $m (s)$ اذا امكن نشر $m (s + r)$ الى متسلسلة غائية مثل

$$(2) \quad u + \frac{u}{1} + \frac{u}{2!} + \frac{u}{3!} + \dots$$

مرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة لـ s تكون هذه المتسلسلة عين المتسلسلة المتحصلة من القانون (١) . فنقول اذا فرضنا ان المتسلسلة (٢) تكون غائية بالنسبة لجميع مقادير s التي هي اقل

من r يحدث

$$m = (s + e) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \quad (2)$$

وباعتبار طرفي هذه المعادلة متعاقبتين بالكمية e تكون مشتقاتهما

متساويتين (مادام $e < e$) أعني يكون

$$m = (s + e) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

ويكون أيضا

$$m = (s + e) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

وأيضا

$$m = (s + e) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

.....

فإذا فرضنا $e = 0$ في المعادلة (٣) وما بعد ما يحدث

$$m = (s) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$v_1 = m = (s) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

وبوضع هذه المقادير في المعادلة (٣) نجد القانون (١)
 وينتج من هذا ان نشر المتعلقة م (س + ع) الى متسلسلة غائية مرتبة
 على حسب قوى ع الصحيحة الموجبة يوجد بواسطة القانون المذكور
 المسمى قانون تيلور ومتسلسلاته

٤٢ . حيث انه لا يمكن استعمال متسلسلة تيلور في نشر المتعلقات الا اذا
 كانت غائية فيلزم البحث عن الباقي من طرح الحدود الاول الذي عددها هـ
 من المتعلقة م (س + ع)

فانه ان قرب هذا الباقي من الصفر كلما زاد هـ تكون م (س + ع) غاية
 المتسلسلة فيمكن نشرها وان زاد الباقي كلما زاد هـ تكن غير غائية ويصير نشرها
 بواسطة قانون تيلور مستحيلا
 لترمز بالحرف ب للباقي المذكور فنجد

$$ب = م (س + ع) - م (س) - ع م (س) - \frac{ع^2}{2!} م (س)$$

$$(٤) \quad \dots - \frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س)$$

وباعتبار ان طرفي هذه المعادلة متعلقان بالكمية ع وفرضنا ان سر
 ثابتة نجد

$$\frac{ب}{ع} = م (س + ع) - م (س) - ع م (س) - \dots - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س)$$

$$\frac{ب}{ع^2} = م (س + ع) - م (س) - \dots - \frac{ع^{س-٣}}{(س-٣)!} م (س)$$

.....

.....

$$م (س) + \frac{ط-س}{1} م (س) + \frac{(ط-س)^2}{2!} م'' (س) + \dots$$

$$+ \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} م^{1-2} (س)$$

الذى ينتج من وضع ط - س بدلا عن س ويؤول الى م (ط) اذا فرض
 $س = ط$ فيحدث

$$م (س) = م (س) + \frac{ط-س}{1} م (س) + \frac{(ط-س)^2}{2!} م'' (س) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} م^{1-2} (س) \quad (1)$$

ويحدث أيضا

$$م (ط) = م (ط) \quad (2)$$

وبأخذ مشتقتى طرفى المعادلة (1) بالنسبة الى س يكون

$$م' (س) = م' (س) + \frac{ط-س}{1} م'' (س) + \frac{(ط-س)^2}{2!} م''' (س) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(ط-س)^{2-2}}{(2-2)!} م^{2-2} (س)$$

$$+ \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} م^{1-2} (س) - م (س) - \frac{ط-س}{1} م' (س) - \dots$$

$$- \dots - \frac{(ط-س)^{2-2}}{(2-2)!} م^{2-2} (س)$$

ويحذف الحدود المتشابهة فنجد

$$م' (س) = م' (س) + \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} م^{1-2} (س) \quad (3)$$

ولنضع ط - س بدلا عن س فى القانون المعلوم

$$م (س + ط) = م (س) + ط م' (س) + \dots$$

فقد

$m(p) = m(r) + (p - r) m[(r - p) + e]$ (٤)
 وإذا أخذنا في (٣) $m + e (p - r)$ بدلا عن m نجد

$$m[(r - p) + e] = \frac{(p - r)^{e-1} (1 - e)}{(1 - e)!} \times$$

$$m^e [(r - p) + e]$$

وبوضع هذا المقدار في (٤) وأخذ بدلا عن $m(p)$ و $m(r)$ ما ماواهما في (١) و (٢) يحدث

$$m(p) = m(r) + \frac{(p - r)}{1} m^1(r) + \frac{(p - r)^2}{2!} m^2(r) +$$

$$+ \dots + \frac{(p - r)^{e-1}}{(1 - e)!} m^{e-1}(r) +$$

$$+ \frac{(p - r)^e (1 - e)}{(1 - e)!} m^e [(r - p) + e]$$

فإذا وضعت الآن الكمية e محالها العنى بدلا عن $(p - r)$ يكون

$$m(e + r) = m(r) + \frac{e}{1} m^1(r) + \frac{e^2}{2!} m^2(r) +$$

$$+ \dots + \frac{e^{e-1}}{(1 - e)!} m^{e-1}(r) +$$

$$+ \frac{e^e (1 - e)}{(1 - e)!} m^e [(r - p) + e] +$$

وهو المطلوب

٤٤ . بواسطة القانونين (١) و (٢) نعرف الحالة التي فيها يمكن بسط المتعلقة $m(e + r)$ الى متسلسلة غائبة على حسب قانون تيلور لانه

(١) ينسب شكل الباقي هذا الى كوشي وهو احد الرياضيين الفرنسيين ولد

سنة ١٧٨٩ ومات سنة ١٨٠٧

إذا قرب أحد الباقيين

$$\frac{e}{n!} (s + e) \quad \text{و} \quad \frac{e}{n!} (1 - e) \quad m^{1-n} (s + e)$$

من الصغر كلما زاد n وبفرض مقدار معلوم للكمية e تكون متسلسلة تيلاور غائية وتكون $m (s + e)$ هي حاصل جمعها وحينئذ يمكن نشر هذه المتعاقبة الى متسلسلة

وما ذكر يكون مثلاً إذا بقيت $m (s)$ محدودة بين النهايتين s و $s + e$ كلما زاد n لانه اذا مرنا بالحرف n لا كبر عدد صحيح تشتمل عليه e يكون

$$\frac{e}{n!} \times \frac{e}{(n-1)!} \times \frac{e}{(n-2)!} \times \dots \times \frac{e}{2!} \times \frac{e}{1!} = \frac{e^n}{n!}$$

وحيث ان كلامنا من العوامل $\frac{e}{1!}, \frac{e}{2!}, \dots$ أصغر من الواحد وعددها $n - 1$ يكون حاصل ضربهم الأصغر من $(\frac{e}{1+e})^{n-1}$ وحينئذ يكون

$$\frac{e^n}{n!} > \left(\frac{e}{1+e} \right)^{n-1}$$

وبما ان $(\frac{e}{1+e})^{n-1}$ يصغر كلما كبر n فتنتهي هذه الكمية بان تصير صفراً وحينئذ تكون نهايتا $\frac{e}{n!}$ و $\frac{e}{n!} (s + e)$ صفراً أيضاً لان m

$(s + e)$ محدودة بالفرض فيمكن بناء على ذلك نشر $m (s + e)$ الى متسلسلة غائية

(الملاحظ ١)

متى أريد بسط المتعاقبة $m (s + e)$ الى الحد

$$\frac{e}{n!} m^{1-n} (s)$$

يكون الخطأ الثاني مساويا للباقي

$$\frac{e}{m} > \frac{e}{m} (s + e)$$

وحيث ان الكمية e مجهولة يلزم ايجاد المائتين اللتين ينحصر بينهما الباقي
الذكور ولذا يستخرج أكبر مقادير m (س) وأصغرها حينئذ تنقل s
متزايد من s الى $s + e$ فاذا رجعنا لهذين المقدارين بالحرفين k
و l يحدث

$$k < m < (s + e) < l$$

فحينئذ يكون

$$\frac{k}{l} < \frac{e}{m} < \frac{e}{m} (s + e) < \frac{l}{e}$$

أعني ان الخطأ المذكور يكون أقل من $\frac{k}{l}$ وأكبر من $\frac{l}{e}$

(الملاحظ ٢) هما كانت المتعلقة m (س) يمكن دائماً أخذ e صغيرة صفراً
ليكون المقدار المطلق للباقي وهو

$$\frac{e}{m} (s + e) - \frac{e}{m} = \frac{e}{m} s$$

انما يشترط ان لا تنعدم المشقة m (س) بمقدار s المتغير ويكون
هذا اذا كان عند اعتبار المقادير المطلقة فقط

$$\frac{e}{m} (s + e) > \frac{e}{m} s$$

$$\frac{e}{m} > \frac{e}{m} (s + e)$$

او يتحقق هذا الشرط بأخذ e صغيرة صفراً كافياً لان الطرف الايمن ينعدم

بفرض $e = 0$

ويمكن ان يلاحظ أيضاً ان نسبة الباقي الى الحد الاخير وهي

$$\frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{ع}}} \times \overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{م}}} (\text{س} + \text{ع})}{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{م}}} (\text{س})}$$
 نصغره قدر ما يراد لانها اقرب من الصفر كلما نقص ع .
 متسلسلة ما كوران (١)

٤٥ . اذا فرضنا في القانونين (١) و (١) ان $\text{س} = ٠$ ووضعنا الحرف
 س عوضا عن ع فجد القانون م (س) = م (٠) + س م (٠) +
 $\frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{١} + \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{٢} + \dots + \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{(١ - \text{س})} + (٠) + \text{ب}$
 الذي كتب فيه ب عوضا عن

$$\frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{١} \quad \text{أو عن} \quad \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} (١ - \text{ع})}{(١ - \text{س})} \text{م} (٠) \text{ (س)}$$

وفرض فيه ان المتعلقة م (س) ومشتقاتها التي هي قبل النونية لا تصير
 لانها تية بجعل $\text{س} = ٠$ وان م (س) تكون محدودة مستمرة بين
 ٠ و س فاذا قرب احد مـ مدارى الباقي ب من الصفر كلما زادت
 يكون للمتسلسلة

$$\text{م} (٠) + \text{س م} (٠) + \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{٢} + \dots + \dots$$

الغير منتهية غاية تعادها وهي م (س) اعنى

$$\text{م} (س) = \text{م} (٠) + \text{س م} (٠) + \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{٢} + \frac{\overset{\circ}{\underset{\circ}{\text{س}}} \text{م} (٠)}{٢} + \dots + \dots$$

(٢) +

وهذا هو قانون ما كوران او متسلسلته .

٤٦ . اذا صارت المتعلقة م (س) او احدى مشتقاتها لانها تية بفرض
 $\text{س} = ٠$ فسطها الى متسلسلة مرتبة على حسب

(١) ولد في الانجليز سنة ١٦٩٨ ومات سنة ١٧٤٦

القوى الصاعدة الموجبة للمتغيرة s يكون مستحيلا في هذه الحالة يجعل
في متسلسلة تيلور $s = e$ و $s = 0$ فيحدث

$$m(s) = m(0) + \frac{(s-0)}{1} m'(0) + \frac{(s-0)^2}{2!} m''(0) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(s-0)^{n-1}}{(n-1)!} m^{(n-1)}(0) + \dots$$

والحرف p يبين

$$\frac{(s-0)^p}{p!} m^{(p)}(0) + \dots + \frac{(s-0)^{n-1}}{(n-1)!} m^{(n-1)}(0) + \dots$$

$$m^{(p)}(0) = \frac{d^p m}{ds^p} \bigg|_{s=0}$$

فيواسطة هذا القانون يمكن بسط $m(s)$ على حسب قوى s - s
الصاعدة ولكن يلزم تعيين الثابتة p بحيث أن المتعاقبة $m(s)$ ومشتقاتها
لا تصير لانتهائية بفرض $s = 0$

٤٧ اذا شوهد عند ابراء العمل في نشر المتعاقبة $m(s)$ بواسطة قانون
ماكوردان أن المتسلسلة غائبة وأن الباقي يقرب من الصفر كلما زاد p
ابحكم بإمكان نشرها ولكن غائية المتسلسلة لا تكفي وحدها في تحقيق
ن حاصل جمع المتسلسلة المذكورة يكون $m(s)$ لأنه يوجد بعض

متعاقبات مثل المتعاقبة $\frac{1}{s^p}$ تصير معدومة هي وجميع مشتقاتها بفرض
 $s = 0$ فينتج من هذا انه اذا أمكن نشر $m(s)$ الى متسلسلة

غائبة على حسب القانون المذكور نجد للمتعلقة $m(s) + \frac{1}{s^p}$
متسلسلة عين المتسلسلة السابقة ولكن عوضا عن أن يكون حاصل

جمعهما $m(s) + \frac{1}{s^p}$ يكون $m(s)$ فيكون من الضروري حينئذ
لعرفته حاصل جمع متسلسلة غائبة اعتبار الباقي في مثالنا الباقي من نشر

م (س) يقرب من الصفر والباقي من نشر المتعلقة م (س) $+\frac{1}{\alpha^{س}}$
يقرب من $\frac{1}{\alpha^{س}}$

٤٨. اذا جعلنا في متساوية تيلور $= - س$ نجد

$$م (٠) = م (س) - س م (س) + \frac{س^2}{2} م (س) + \frac{س^3}{6} م (س) - \dots$$

ومنه

$$م (س) = م (٠) + س م (٠) - \frac{س^2}{2} م (٠) + \frac{س^3}{6} م (٠) - \dots$$

وهو قانون بيرنولي (١)

الباب التاسع

(نظريات انسلاية ما كاوران)

١٠. قانون نيوتون

٤٩. يمكن م (س) $= (س + ١)$ الذي فيه عدد كيفما
اتفق فنجد

$$\begin{aligned} م (س) &= (س + ١) م (س) \\ م (س) &= (س + ١) (١ - س) م (س) \\ م (س) &= (س + ١) (١ - س) (٢ - س) م (س) \\ &\dots \end{aligned}$$

(١) جاك بيرنولي هو احد الرياضيين ذوي الابداع في هذا العلم ولد سنة ١٦٥٤
بالويسرة ومات سنة ١٧٠٥

كون مقدار s المطلق أصغراً أو أكبر من الواحد دفاته إذا أخذنا q رمزاً
للمدى مرتبة q نجد

$$1 - q = \frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2^{q-1}})(1-s^{2^q})}{(1-s^{2^q})} = \frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2^{q-1}})}{(1-s^{2^q})}$$

$$و \quad 1 - q = \frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2^{q-1}})(1-s^{2^q})}{(1-s^{2^q})} = \frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2^{q-1}})}{(1-s^{2^q})}$$

ومن هنا

$$\frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - s}{1 - s} = \frac{(1 + s)}{1 - s}$$

وحيث أنه كلما زاد q تقرب الكمية $\frac{(1+s)}{1-s}$ من الصفر فالنسبة المذكورة

تقرب من $1 - s$ فإذا كانت s محصورة بين $1 - s$ و $1 + s$ ينتهي المقدار
المطلق لهذه النسبة بأن يصير أصغر من الواحد وتكون المتسلسلة غائية

أما إذا كانت s خارجة عن هاتين النهايتين فالنسبة $\frac{1 - q}{1 - q}$ تكون

أكبر من الواحد وحيث أن المتسلسلة تكون غير غائية

٥. تسهل البرهنة على أن $(1 + s)$ هو حاصل جمع المتسلسلة إذا

كانت $s > 1$ لأن الباقي الأول يساوى حاصل ضرب الكميتين

$$\frac{(1 + s)}{(1 + s)} = \frac{(1 + s)}{(1 + s)} \times \dots \times \frac{(1 + s)}{(1 + s)} \times \frac{(1 + s)}{(1 + s)} = \frac{(1 + s)}{(1 + s)}$$

وحيث أن العامل الأخير من الكمية الأولى وهو

$$\frac{(1 + s)}{(1 + s)} \quad \text{أو} \quad \frac{(1 + s)}{(1 + s)}$$

يقرب من $1 - s$ كلما كبر q فتكون الكمية المذكورة حينئذ أصغر

من الواحد ويقترب حاصل الضرب الأول من الصفر كلما زاد q ويجعل

$$q = 1 = 1 \text{ في الكمية الثانية وهي } \frac{(1 + s)}{(1 + s)} \text{ المساوية}$$

$$\frac{1}{(1 + s)} \text{ نرى أن المقدار من محصورة بين الواحد و } \frac{1}{(1 + s)}$$

اعنى اقل من الواحد اذا كانت s موجبة فاذا يقرب الباقي b من الصفر
كلما زاد s وتكون حينئذ $(1+s)$ حاصل جمع المتسلسلة

واذا كانت s سالبة فلا يمكن الجزم بان الكمية $\frac{1}{(1+s)}$ التي

تؤول الى $\frac{1}{(1-s)}$ بفرض $s = -\epsilon$ لانصير لانها سالبة ولكن

باعتبار الباقي الثاني نرى ان المقدار

$$\frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2n})}{(1-s)^{2n+1}}$$

يقرب من الصفر كلما زاد n وان الكمية

$$\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{2n+1}$$

تصير منحصرة دائما بين الصفر والواحد لان $1-s > 1+s$ فيقرب
الباقي b من الصفر وينتج عما ذكر ان $(1+s)$ يكون حاصل جمع
المتسلسلة حينئذ s اى مقدار من المقادير المصورة بين -1 و 1
انظر المتعاقبات الاسية

٥١. اذا فرض ان $m = (s)$ وان ϵ عدد حيتما اتفق موجب نجد

$$m = (s) = \epsilon^1$$

$$m = (s) = \epsilon^2$$

$$m = (s) = \epsilon^3$$

$$m = (s) = \epsilon^4$$

$$m = (s) = \epsilon^5$$

$$m = (s) = \epsilon^6$$

ومن هذا

$$m = (0) = 1$$

$$m^{(0)} = \text{لع}^0$$

$$m^{(1)} = \text{لع}^1$$

$$m^{(2)} = \text{لع}^2$$

$$m^{(1-2)} = \text{لع}^{1-2}$$

$$m^{(2r)} = \text{لع}^{2r}$$

فموجب قانون ما كاورا يحدث

$$1 + \text{لع}^1 + \frac{\text{لع}^2}{2!} + \frac{\text{لع}^3}{3!} + \dots + \frac{\text{لع}^{1-2}}{(1-2)!}$$

$$+ \frac{\text{لع}^{2r}}{2r!} + \dots$$

ومن المعلوم (المطلب ٤٤) ان الكمية

$$\frac{\text{لع}^{2r}}{2r!}$$

تقرب من الصفر كلما زادت $2r$ وان للعامل $2r$ مقدارا محدودا فيقرب

الباقى من الصفر ويكون حينئذ $2r$ هو حاصل جمع المتسلسلة

وان كان $2r = \infty$ الذي منه $\text{لع} = 1$ يكن

$$1 + \frac{\text{لع}^1}{1!} + \frac{\text{لع}^2}{2!} + \dots + \frac{\text{لع}^{1-2}}{(1-2)!} + \frac{\text{لع}^{2r}}{2r!} + \dots = \infty$$

ويجوز $1 = 2r$ يحدث القانون المعلوم

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \infty$$

٠٣. نلاحظ ان $(1+r)$

٠٤. اذا فرضنا ان $m^{(r)} = \text{لع}^{(1+r)}$ نجد

$$\begin{aligned}
 {}^1_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s \times 1) \\
 {}^2_m &= (s) \cdot \alpha - \quad (s+1) \\
 {}^3_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^4_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^5_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^6_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^7_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^8_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^9_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^{10}_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1)
 \end{aligned}$$

ومن هنا

$$\begin{aligned}
 {}^1_m &= (s) \cdot \alpha \\
 {}^2_m &= (s) \cdot \alpha - \\
 {}^3_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^4_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^5_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^6_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^7_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^8_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^9_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^{10}_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1)
 \end{aligned}$$

وحينئذ يصير

$$\alpha(s+1) = (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha \quad (s+1) \cdot \alpha$$

و ب عبارة عن إحدى الكميتين

$$\begin{aligned}
 {}^1_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^2_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^3_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^4_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^5_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^6_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^7_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^8_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^9_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1) \\
 {}^{10}_m &= (s) \cdot \alpha \quad (s+1)
 \end{aligned}$$

فإذا كانت s ، وجبة أقل من الواحد تقرب الكمية $\frac{1}{s+1}$ من الصفر كلما زيد s وإذا انحصرت بين الصفر و 1 فالباقي الثاني يقول بعد فرض أن $s = 1 - ط$ الى

$$\frac{ط}{1-ط} = \frac{1-ط}{1-ط}$$

وحيث ان $\tau > 1$ فالعامل τ يقرب من الصفر وكذا حيث ان

$$1 - \tau > 1 - \tau \quad \tau \quad \text{تكون الكمية} \left(\frac{1-\tau}{1-\tau\tau} \right)^{1-\tau} \text{ اصغر من}$$

الواحد فينته اذا كانت τ محصورة بين $1 - \tau$ و $1 + \tau$ تكون المتسلسلة غائية ويكون حاصل جمعها يساوي لها $(1 + \tau)$ واذا وقعت خارج هاتين النهايتين تكون المتسلسلة غير غائية (مطلب ٤٠ المثال الاول)

٥٣. اذا وضعنا τ بدلا من τ في القانون (١) من المطلب السابق نجد

$$\text{لها } (1 - \tau) = 1 - \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

وبطرح هذا منه يحدث

$$\text{لها } \frac{1+\tau}{1-\tau} = 1 + \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

واذا فرض ان $\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{1+\tau}{\tau}$ الذي ينتج منه $\tau = \frac{\tau}{1+\tau}$ بول القانون الاخير الى

$$\text{لها } \frac{1+\tau}{\tau} = 1 + \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

$$[\frac{\tau}{1+\tau} + \frac{\tau^2}{(1+\tau)^2} + \frac{\tau^3}{(1+\tau)^3} + \frac{\tau^4}{(1+\tau)^4} + \dots]$$

وبفرض ان $\tau = 1$ يكون

$$\text{لها } (1 + \tau) = 1 + \tau \propto [\frac{1}{1+\tau} + \frac{1}{(1+\tau)^2} + \frac{1}{(1+\tau)^3} + \dots]$$

+

فبواسطة هذا القانون يمكن حساب لوغاريتات جميع الاعداد الصحيحة من ابتدا الواحد

ويمكن ايجاد قانون آخر اسهل في الاستعمال وذلك بجعل

$$\frac{1}{1-\tau} = \frac{1}{1-\tau} \quad \text{الذي منه } \tau = \frac{1}{1-\tau}$$

$$\text{وبالاحظة ان لها } (1 - \tau) = 1 - \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

لها $(1 - \tau)$ فيحدث

$$\text{لها } (1 + \tau) = 1 + \tau \propto (1 - \tau) = 1 - \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

ومنه

$$لما \infty = \frac{1}{لع 10} = 2 \ 8 \ 4 \ 4 \ 9 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2$$

وهو المطلوب

٤ . نشر بعض متعلقات دائرية

$$٥٥ . ليكن م (س) = جا س فيكون$$

$$م (س) = جتا س$$

$$م'' (س) = - جا س$$

$$م''' (س) = - جتا س$$

$$م^{(4)} (س) = جا س$$

.....

$$م^{(5)} (س) = - جا س$$

$$م^{(6)} (س) = جتا س$$

$$م^{(7)} (س) = - جا س$$

$$م^{(8)} (س) = جتا س$$

$$م^{(9)} (س) = - جا س$$

.....

ومنه

ومن هنا يشاهد ان المشتقات ذات المراتب الزوجية معروفة وان التي تكون
مراتبها فردية تساوي ± 1 فاذا فرضت φ فردية يحدث

$$جا س = س - \frac{س^3}{3!} + \frac{س^5}{5!} - \frac{س^7}{7!} + \dots + \frac{س^{2n-1}}{(2n-1)!} - \dots$$

$$\pm \frac{س^2}{(1-2)!} جتا س$$

وحيث ان مقدار جنة s المطلق هو دائماً أقل من واحد فبقرب الباقي
من الصفر وتكون المتسلسلة

$$جنا س = س - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots$$

غائية مهمما فرضت s

٥٦. ايكن $m(3) = جنا س$ فيجدت

$$m(1) = جنا س$$

$$m(2) = جنا س$$

$$m(3) = جنا س$$

$$m(4) = جنا س$$

.....

$$m(0) = 1$$

ومنه

$$m(1) = 0$$

$$m(2) = 1$$

$$m(3) = 0$$

$$m(4) = 1$$

.....

وبفرض 3 عدد زوجي يصير

$$جنا س = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \dots$$

$$+ \frac{s^{2-5}}{(2-5)!} + \frac{s^{5-7}}{(5-7)!} + \dots$$

وبشاهد كما سبق انه مهمما كانت s يكون

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \text{جنا } s$$

٥٧. ليكن $s =$ فوطا s فقبد [مطلب^{٢٧} غرين ٢ (ج)] ان

$$\text{اذا كانت } s \text{ فرضية} \quad = \left(\frac{1+s}{1+s} \right)$$

$$(1-s) = \left(\frac{1+s}{1+s} \right)$$

فاذا فرضنا على التوالي أن $s = 0, 1, 2, 4, 6, 8, \dots$ يحدث

$$1 = \left(\frac{1}{1} \right)$$

$$2 = \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$4 = \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$6 = \left(\frac{6}{7} \right)$$

.....

واذا وضعنا هذه المفادير في قانون ما كاوران ولا حظنا ان $m = 0$ فوطا $s = 0$ وأن المشتقات ذات المرتبة الزوجية كلها معدومة ينتج

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - s = \text{فوطا } s$$

شرطان $s < 1$ و $s > 1$ او $s = 1$ لان الباقي (١)

(١) وجدنا هذا الباقي بما قلنا في الفقرين الرابع (ب) (مطلب^{٢٧})

وهو $p = \pm \frac{1}{2} \frac{J_0(\text{فوق طا س})}{J_0(1 + \text{س}^2)}$ يقرب من الصفر كلما زاد J_0

ويجعل $s = 1$ لمجد

$$\dots\dots\dots \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{7}{2}$$

وهي صورة فاريفقة لاجبة الدائرة الى قطرها

(تجربيات)

١. انشر $m(s) = J_0(s)$ بموجب قانون ما كاوران

الجواب

$$J_0(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{J_0(s^2)}{1!} - \frac{J_0(s^2)}{2!} + \frac{J_0(s^2)}{3!} - \dots \right] \text{ مهما}$$

كانت s لان الباقي هو

$$p = \frac{1}{2} \frac{J_0(s^2)}{1!} - \frac{1}{2} J_0(s^2) \left(\frac{2}{1} \right)$$

٢. $m(s) = J_0(s)$ (فوق طا س)

الجواب

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{J_0(s^2)}{2!} + \frac{1}{3} \frac{J_0(s^2)}{3!} + \frac{1}{4} \frac{J_0(s^2)}{4!} + \dots$$

..... +

٣. انشر $m(s) = J_0(s)$ بموجب قانون بيرنولي

الجواب

$$(s + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{J_0(s^2)}{1!} - \frac{1}{2} \frac{J_0(s^2)}{2!} + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{2} \frac{J_0(s^2)}{(s + 1)^2} \times$$

الباب العاشر

في العبارات التفاضلية

٥٨. من المعلوم ان جذور المعادلات ذات الدرجة الثانية تاخذ في بعض الاحيان هذه الصورة $\sqrt{s} + \sqrt{1-s}$ التي فيها s و $1-s$ عددان كيفما اتفق من جهة الايجاب والسالب و \sqrt{s} الذي ليس له قيمة معينة يفرض ان مربعه $1-s$ وكل ما جاء على هذه الصورة يسمى بالعبارة التخييلية

اذا لم يكن تحويل متعلقة م مثلا الى صورة تخيلية بطريقة اثنين مختلفين بحيث يكون مثلا

$$\sqrt{s} + \sqrt{1-s} = m \text{ و } \sqrt{s} + \sqrt{1-s} = m$$

ينبغي ضرورة ان

$$s = s \text{ و } s = s$$

٥٩. كل عبارة تخيلية $\sqrt{s} + \sqrt{1-s}$ يمكن ان تاخذ الوضع غ (جنا ن + (جنا ن - (حان

وهذا يجعل

$$s = s \text{ و } s = s$$

لانه ينتج من هاتين المعادلتين ان

$$s = s \text{ و } s = s$$

$$\frac{s}{s} = \frac{s}{s} \text{ و } \frac{s}{s} = \frac{s}{s}$$

فالكمية s التي هي موجبة دائما تسمى مقياسا للزاوية s تسمى دايلا للعبارة التخييلية

وعادة ياخذ للزاوية s اصغر قوس موجب من القانون $s = s$

(قانون موافق)

أشهر حان s و جنا s

$$٦٠. \text{ اذا ضربت جنا } \overline{\gamma + \text{جا}} - \overline{\text{ا}} \text{ جا } \text{ في جنا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص يحدث}$$

$$\text{جنا } \text{ ص} \text{ جنا } \text{ ص} - \text{جا } \text{ ص} \text{ جا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص} \text{ (جا } \text{ ص} \text{ جا } \text{ ص} + \text{جا } \text{ ص} \text{ جنا } \text{ ص})$$

وكما هو واضح

$$\text{جنا } (\text{ص} + \text{ص}) + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } (\text{ص} + \text{ص})$$

فينتج انه يكفي لايجاد حاصل ضرب عبارتين تخيليتين من هذه الصورة جنا $\overline{\gamma + \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص}$ ان نجمع الدلائل ومثل المضروبين في هذه اعدة مضارب فان حصل ضرب

$$(\text{جنا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص}) (\text{جنا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص})$$

$$(\text{جنا } \text{ ط} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ط}) \dots\dots\dots$$

$$= \text{جنا } (\text{ص} + \text{ص} + \text{ط} + \text{ط} + \dots\dots\dots) + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } (\text{ص} + \text{ص} + \text{ط} + \text{ط} + \dots\dots\dots) + \dots\dots\dots (١)$$

واذا كانت المضارب كلها متساوية وكان عددها ع فنجد

$$(\text{جنا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ ص})^{\text{ع}} = \text{جنا } \text{ع} \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ جا } \text{ع} \text{ ص}$$

(٢) \times حاء ص

وهذا هو المعنى بقانون موافق

واذا وضع فيه $\overline{\gamma - \text{ا}}$ وضاعن $\overline{\gamma - \text{ا}}$ يحدث

$$(\text{جنا } \text{ ص} - \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ حاء } \text{ص}) = \text{جنا } \text{ع} \text{ ص} - \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ حاء } \text{ع} \text{ ص}$$

ويمكن ايجاد الطرف الثاني من القانون آخذ صورة اخرى وذلك بسط الطرف الاول على منتهى قانون نيوتن فان نجد

$$(\text{جنا } \text{ ص} + \overline{\gamma - \text{ا}} \text{ حاء } \text{ص})^{\text{ع}} = \text{جنا } \text{ع} \text{ ص} - \frac{\text{ع}(\text{ع}-١)(\text{ع}-٢)\dots\dots\dots}{١!} \text{جنا } \text{ع} \text{ حاء } \text{ص} + \dots\dots\dots$$

١٤

$$+ \frac{1 - \gamma}{1 - \epsilon} [\epsilon \text{ جتا } 1 - \epsilon] \text{ سر جاسر } - \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{3!}$$

$$\times \text{ جتا } 2 - \epsilon \text{ سر جاسر } + \dots (3)$$

فبواسطة (٢) و (٣) وما تقدم في مطاب يكون

$$\text{جتا سر} = \text{جتا سر} - \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{2!} \text{ جتا سر جاسر} + \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)(3 - \epsilon)}{4!}$$

$$\times \text{ جتا } 4 - \epsilon \text{ سر جاسر } - \dots$$

$$\text{جا سر} = \epsilon \text{ جتا } 1 - \epsilon \text{ سر جاسر } - \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{3!}$$

$$\times \text{ جتا } 3 - \epsilon \text{ سر جاسر } + \dots$$

(بسط جاسر و جتا سر)

على حسب جيب مكررات القوس سر وجيب مقاماتها

٦١. لتكن المعادلتان

$$د = \text{جتا سر} + \gamma 1 - \gamma \text{ جاسر و } \psi = \text{جتا سر} - \gamma 1 - \gamma \text{ جاسر}$$

اللتان يحدثنان

$$2 \text{ جتا سر} = د + \psi \text{ و } 2 \gamma 1 - \gamma \text{ جاسر} = د - \psi$$

فيكون بموجب قانون نيوتن

$$2 \text{ جتا سر} = (د + \psi) = د + \psi \text{ و } 2 \gamma 1 - \gamma \text{ جاسر} = د - \psi$$

$$+ \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{2!} \psi + \gamma 2 - \epsilon \text{ و } \psi + \gamma 1 - \epsilon \text{ و يكون أيضا}$$

$$(1 - \gamma) \text{ جاسر} = (د - \psi) = د - \psi \text{ و } \psi + \gamma 1 - \epsilon \text{ و يكون أيضا}$$

$$- \dots + \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{2!} \psi + \gamma 2 - \epsilon \text{ و } \psi + \gamma 1 - \epsilon$$

فإذا فرضت ϵ عددا زوجيا ينتج حد متوسط مجهول $\frac{\epsilon}{r} = \frac{1}{2}$ في الحد العام
 $\epsilon (1 - \epsilon) (2 - \epsilon) \dots (r - \epsilon) \dots (1 + \epsilon - \epsilon) \dots \frac{1}{2}$

$$\text{وهو } \frac{\epsilon (1 - \epsilon) (2 - \epsilon) \dots (r - \epsilon) \dots \frac{\epsilon}{r}}{\frac{1}{2}}$$

ويضم الحدود ذات الأبعاد المتساوية من الحدين المتطرفين في المعادلتين
 السابقتين ينتج

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{ جتا } \epsilon = (\epsilon + \frac{\epsilon}{r}) + \frac{\epsilon}{r} (\epsilon - \epsilon + \epsilon - \epsilon) \dots + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots (2 - \epsilon) (1 - \epsilon) \dots \frac{1}{2} \\ + \dots + \frac{\epsilon}{r} (\epsilon - \epsilon + \epsilon - \epsilon) \dots + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots (2 - \epsilon) (1 - \epsilon) \dots \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 (1 - \frac{\epsilon}{r}) \text{ جا } \epsilon = (\epsilon + \frac{\epsilon}{r}) - \frac{\epsilon}{r} (\epsilon - \epsilon + \epsilon - \epsilon) \dots + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots (2 - \epsilon) (1 - \epsilon) \dots \frac{1}{2} \\ + \dots + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots (2 - \epsilon) (1 - \epsilon) \dots \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وحيثان $\frac{\epsilon}{r} = 1$ و $\frac{\epsilon}{r} = \text{جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} (1 - \frac{\epsilon}{r}) \text{ جا } \epsilon$
 $\frac{\epsilon}{r} = \text{جتا } \epsilon - \frac{\epsilon}{r} (1 - \frac{\epsilon}{r}) \text{ جا } \epsilon$ وإذا $\frac{\epsilon}{r} = 1$
 $\epsilon^2 \text{ جتا } \epsilon = \text{جتا } \epsilon + \epsilon (1 - \epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{ جتا } \epsilon = \text{جتا } \epsilon + \epsilon (1 - \epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots \\ \times \text{ جتا } \epsilon (1 - \epsilon) \dots + \dots + \frac{\epsilon}{r} \epsilon (1 - \epsilon) \dots (1 + \frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(1 - \frac{\epsilon}{r})^2 \text{ جا } \epsilon = \text{جتا } \epsilon - \epsilon (1 - \epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \dots$$

$$+ \frac{e(1-e)}{2!} \text{ جتا } (1-e) \text{ سر } - \dots$$

$$+ \frac{e(1-e)(1-e)}{4!} \dots \left(1 + \frac{e}{2}\right)$$

أما إذا فرضت e عددا فرديا يكون عدد الحدود زوجيا ونجد الحدين
المتوسطين بحمل $2 = \frac{1-e}{2}$ و $2 = \frac{1+e}{2}$ في الحداهما وإذا

ضمت الحدود ذات الأبعاد المتساوية من الحدين المتطرفين ولو نظرنا

$$(1-e)^{\frac{1-e}{2}} = (1-e)^{\frac{e}{2}}$$

نتج

$$2 \text{ جتا } e = 2 + 2 + e + (e - e + e - e) + \dots + \frac{e(1-e)}{2!}$$

$$\times (e - e + e - e + \dots + e - e)$$

$$+ \frac{e(1-e)}{4!} \dots \frac{e(1-e)}{2!} (2+e) \frac{e(1-e)}{2!} \dots$$

$$(1-e)^{\frac{1-e}{2}} \text{ جتا } e = (e - e + e - e) + \dots + \frac{e(1-e)}{2!} (e - e + e - e) + \dots$$

$$+ \frac{e(1-e)}{4!} \dots \frac{e(1-e)}{2!} (2-e) \frac{e(1-e)}{2!} \dots$$

وبقسمة هاتين المعادلتين على 2 يحدث

$$2 \text{ جتا } e = \text{جتا } e + \frac{e}{2} \text{ جتا } (1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{2!}$$

$$\times \text{جتا } (1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{4!} \dots \frac{e(1-e)}{2!} \text{ جتا } e$$

$$(1-e)^{\frac{1-e}{2}} \text{ جتا } e = \text{جتا } e - \frac{e}{2} \text{ جتا } (1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{2!}$$

$$\times \text{ جا } (٤-٤) \text{ سر } ٠٠ \pm \frac{٤(١-٤) \dots \frac{٢+٤}{٢} \text{ جا سر}}{١ \frac{٤-٤}{٢}}$$

(في حل المعادلة ذات الحدين)

٦٢. اذا فرضت المعادلة $\sqrt{x} = ٢$ وفرضت ٢ كمية موجبة
ثم أريد إيجاد جميع مقادير المجهول x الحقيقية والتخيلية نرسم بالحرف x

الجذر ٢ العيني العددي أعني $x = \sqrt{٢}$ ثم نضع $\sqrt{x} = ٢$ سر

بفرض ٢ مجهولاً جديداً فنؤول المعادلة المقروضة الى $\sqrt{x} = ٢$ سر

وحيث ان $x = ٢$ يكون $\sqrt{x} = ١$

لنعتبر أولاً المعادلة $\sqrt{x} = ١$ التي ينتج منها $\sqrt{x} = ١$ فاذا جعلنا $\sqrt{x} =$
 $\frac{٢}{٤}$ المقروض فيه ٢ عدداً صحيحاً يحدث منه

$٤ = ٢$ سر ٢ و ٢ جتا $٢ = ١$ و ٢ جا $٤ = ٢$ و
واذا وضعت هذه المقادير في القانون

$$(\text{جتا } ٢ \text{ سر} + (\sqrt{x} \text{ جا } ٢)) = (\sqrt{x} \text{ جتا } ٢ \text{ سر} + (\sqrt{x} \text{ جا } ٤))$$

$$\text{يكون } ١ = (\text{جتا } \frac{٢}{٤} \text{ سر} + (\sqrt{x} \text{ جا } ١ - \sqrt{x} \text{ جتا } \frac{٢}{٤}))$$

$$\text{ومنه } ٢ = (\text{جتا } \frac{٢}{٤} \text{ سر} + (\sqrt{x} \text{ جا } ١ - \sqrt{x} \text{ جتا } \frac{٢}{٤}))$$

$$\text{فاذا أصبح } ٢ = \text{جتا } \frac{٢}{٤} \text{ سر} + (\sqrt{x} \text{ جا } ١ - \sqrt{x} \text{ جتا } \frac{٢}{٤}) \quad (١)$$

واذا فرض على التوالي ان $٢ = ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩$

ياخذنا قوس $\frac{٢}{٤}$ مقادير مختلفة عددها ٤ وكل واحد منها أقل من ٢ وحيث انه لا يمكن ان يكون اقوس بين منها اجيب وجيب متم متساويان فتحدث
حينئذ جزور المجهول التي عددها

واذا جعل للكمية ٢ مقاديراً كبر من ٤ حدثت الجذور السابقة بعينها
لانه لو فرض ان $٢ = ٤ + ٢$ الذي فيه ٤ عدد صحيح وان فون

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{ع} - \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{ع}}$$

فاذا يمكن أيضا إيجاد المقدار المذكور ويجعل $0 = 0$ ر ١ ر ٢ ر
 ر $\frac{ع}{٢}$ أو $\frac{١-ع}{٢}$ (على حسب كون ع زوجية أو فردية)
 في القانون

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{ع} + \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{ع}}$$

(في معرفة مقداري ط س و جئا س بواسطة)

(الكمية الاسمية التخيلية)

٦٢. اترجع الى المتسلسلة

$$\alpha = 1 + س + \frac{س^2}{٢!} + \frac{س^3}{٣!} + \frac{س^4}{4!} + \dots$$

ونفرض انها تحقق أيضا اذا وضع فيها $س = \sqrt{1 - بدلا عن س فيجد$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - س} + \frac{س^2}{2!} - \frac{س^3}{3!} + \frac{س^4}{4!} - \dots + \sqrt{1 - س}$$

$$\times \left(س - \frac{س^2}{2!} + \frac{س^3}{3!} - \frac{س^4}{4!} + \dots \right)$$

وحيث ان الجزء الحقيقي من الطرف الثاني يساوى جئا س ومكرر $\sqrt{1 - س}$
 يساوى حاسر يكون

$$س = \sqrt{1 - س}$$

$$\alpha = جئا س + \sqrt{1 - س} حاسر$$

وبتغيير علامة $\sqrt{1 - س}$ يحدث

$$س = \sqrt{1 - س}$$

$$\alpha = جئا س - \sqrt{1 - س} حاسر$$

و منهم ما يحدث

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \\ & \text{جنا} \quad \frac{\alpha + \alpha}{2} \\ & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \\ & \text{حاصر} \quad \frac{\alpha - \alpha}{2} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

٦٢. من المعلوم انه اذا كان α و β كيتين حقيقيتين يكون

$$\alpha = \alpha \times \beta \quad \alpha + \beta$$

فهذا الارتباط يتحقق أيضا اذا وضع $\overline{\gamma} - \overline{\gamma}$ و $\overline{\gamma} - \overline{\gamma}$ بدلا
عن α و β لانه من القانون (١) ينتج

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \\ & \alpha = \text{جنا} + \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \text{حاصر} \\ & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \\ & \alpha = \text{جنا} + \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \text{حاصر} \end{aligned}$$

واذا يكون

$$\begin{aligned} & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \\ & \alpha \times \alpha = \text{جنا} + (\alpha + \beta) + \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad \alpha + (\alpha + \beta) \\ & \overline{\gamma} - \overline{\gamma} \quad (\alpha + \beta) \\ & \alpha = \end{aligned}$$

أعني ان خواص المتعلقة α تبقى بدون تغير سواء كانت α حقيقية
او تخيلية

(في الاوغاريتمات الصلبة)

٦٥. اذ فرض ان

$$و + \overline{\gamma - 1}$$

$$\alpha = \overline{\gamma - 1} + \text{ص}$$

فتسمى و + $\overline{\gamma - 1}$ لو غاريتم $\text{ص} + \overline{\gamma - 1}$ الثبراني
فاذا جمعنا

$$\text{ص} = \text{ع} \text{ جنا هـ و } \text{ص} = \text{ع} \text{ جا هـ}$$

مع القرض ان ع عدد موجب والزبوية هـ محه ورتين - $\text{و} + \text{و}$
يمكن وضع $\text{ص} + \overline{\gamma - 1}$ على هذه الصورة

$$\text{هـ} \overline{\gamma - 1}$$

$$\text{ع} (\text{جنا هـ} + \overline{\gamma - 1} \text{ جا هـ}) = \alpha \text{ ع}$$

فالمعادلة المقترضة تصير

$$\alpha (\text{جنا و} + \overline{\gamma - 1} \text{ ط و}) = \text{ع} (\text{جنا هـ} +$$

$$\overline{\gamma - 1} \text{ ط هـ})$$

$$\alpha \text{ جنا و} = \text{ع جنا هـ} \text{ و } \alpha \text{ ط و} = \text{ع ط هـ}$$

$$\alpha = \text{ع} \text{ او } \alpha = \text{ع} \text{ فيكون}$$

وينتج ان

$$\text{و} = \text{هـ} + \text{ز} \text{ ك } \text{و}$$

بفرض ك ع د محض غير معين

$$\text{هـ} \overline{\gamma - 1}$$

وعما سيؤخذ ان لكل متعلقة تخيلية مثل $\text{ط} = \text{ع} \alpha$
لو غاريتمات ثبرانية لا صرنا دها وتخرج بواسطة القانون

$$\text{ط} = \alpha \text{ ع} + (\text{هـ} + \text{ز} \text{ ك } \text{و}) \overline{\gamma - 1}$$

فاذا فرض ان ك = . نجد

$$\text{ط} = \alpha \text{ ع} + \text{هـ} \overline{\gamma - 1}$$

وهذا

وهذا المقدار هو الذي سماه الرياضي كوتشي مقدار α ط الاضلي

الباب الحادي عشر

(في النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات الظاهرة) •

بمتغيرة واحدة

٦٦ • اذا فرضت المتعلقة M (س) وفرض ان α تأخذ جميع المقادير التي يجب ان تبقى • هذه المتعلقة حتمية فبالجاء مقادير M (س) المتتابعة تارة تصاعد وتارة تنازل فالقدار الذي تنتقل به من التصاعد الى التنازل فيسمى النهاية الكبرى والمقدار الذي تنتقل به من التنازل الى التصاعد يسمى نهاية صغرى

فالعلامة المميزة للنهاية الكبرى هي حينئذ كونها اكبر من المقادير السابقة اليها واللاحقة لها واما علامة النهاية الصغرى كونها اصغر

وبعبارة اخرى يقال عند اخذ α المقدار α ان M (س) في تماميتها الكبرى اذا كانت M (س) اكبر من $M \pm \epsilon$ مع فرض ان ϵ صغيرة بقدر ما يراد فالفرقان $M + \epsilon$ و $M - \epsilon$ يكونان حينئذ سالبين

ويقال ان M (س) في تماميتها الصغرى اذا كانت M (س) اصغر من $M \pm \epsilon$ فالفرقان $M + \epsilon$ و $M - \epsilon$ يكونان موجبيين

٧٧ • حيث علم (مطابقاً) أن المتعلقة تصاعداً أو تنازلاً على حسب كون المشتقة موجبة او سالبة ينتج انه بمرور α بالمقدار α الذي به صارت المتعلقة في نهايتها الكبرى تغير علامة المشتقة من الايجاب الى السلب واذا كان α هو المقدار الذي به تصير المتعلقة في نهايتها الصغرى تغير علامة المشتقة من السلب الى الايجاب

ولكن حيث لا يمكن ان تتغير علامة المتعلقة اذا لم تكن معدومة اولاً نهائية او غير معدومة فمقادير المتغيرة الموافقة للنهاية الكبرى أو الصغرى تكون كذلك

معدنه أو لانهاية أو غير مستمرة . والمعتبر الآن هي الحالة الأولى

٦٨ . لنفرض ان المشتقة الثانية m (س) ليست لانهاية ولا غير مستمرة
فما يقرب من المقدار \cdot فتجد على حسب قانون تيلور

$$m - (e + \cdot) = \cdot m - (e + \cdot) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} m + (e + \cdot) m \quad (1)$$

ولكن اذا لم تنعدم m (س) يمكن ان تؤخذ e صغيرة صغرا كافيا (مطابقا)

لكي تكون علامة الطرف الثاني عين علامة الحد الاول أعني e m (س)
فعلمة الفرق $m - (e + \cdot)$ تتغير مع علامة e الا يوجد حينئذ
للمتعلقة m (س) نهاية كبرى ولا صغرى فينبغي في الحالتين ان تكون

$m - (e + \cdot) = 0$. وينتج من هذا ان مقادير s التي بها نصير m (س) في نهاية

كبرى أو صغرى لا توجد الا بين جذور المعادلة m (س) = 0 . فتؤول
المسألة حينئذ الى حل المعادلة المذكورة بالنسبة للمجهول s ويؤول القانون
(١) الى

$$m - (e + \cdot) = \cdot m - (e + \cdot) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} m = 0$$

فاذا نسب لأكبرية e مقادير غير موجبة او سالبة تكون علامة الطرف

الثاني عين علامة m (س) واذا لا تتغير علامة لفرق $m - (e + \cdot)$ —

m (س) بتغير علامة e وتكون حينئذ m (س) في نهاية كبرى أو صغرى

على حسب كون المشتقة الثانية m (س) سالبة أو موجبة واذا فرضت

$$m - (e + \cdot) = 0 \text{ يكون}$$

$$m - (e + \cdot) = \cdot m - (e + \cdot) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} m + \frac{e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} m = 0$$

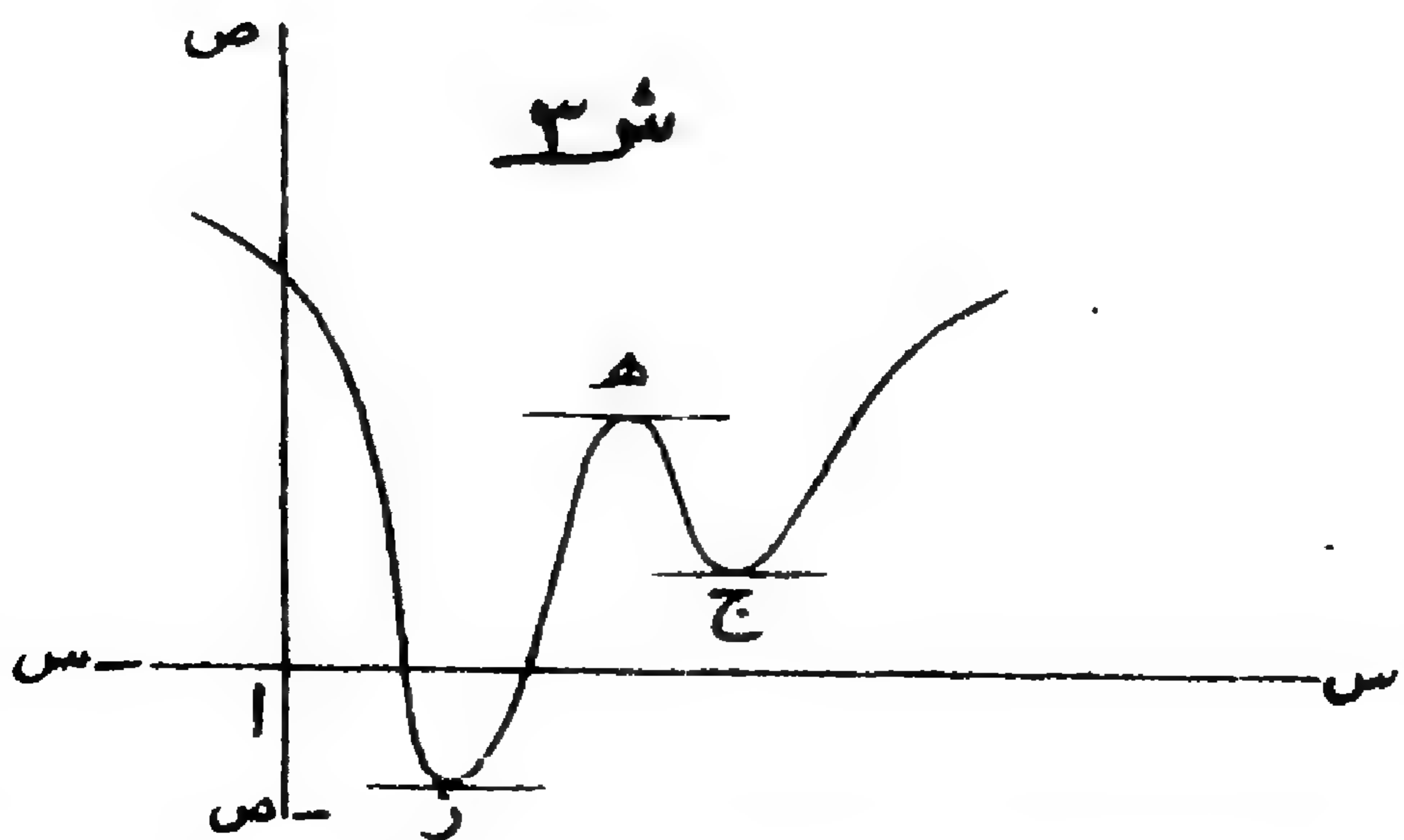
فيرى ان الحد الاول من الطرف الثاني تتغير علامته مع تغير علامة e فاذا

كانت المشتقة الثالثة m''' (ج) ليست مع رمة بتغير علامة الفرق $m(ع+ج)$
 - $m(ج)$ بتغير علامة $ع$ فلا يوجد حينئذ علاقة $m(سر)$ بنهاية كبرى
 ولا صغرى وأما إذا فرضت $m'''(ج) = ٠$ فتؤول المعادلة الباقية إلى

$$m(ع+ج) - m(ج) = \frac{ع}{٤} m'''(ع+ج)$$

ويرى كما تقدم أنه إذا كانت $m'''(ج)$ ليست معدومة فتكون $m(سر)$ في نهاية
 كبرى إذا كانت $m'''(ج) > ٠$ وفي نهاية صغرى إذا كانت $m'''(ج) < ٠$
 وبهذه الطريقة يتحكم أنه إذا كانت $m''(سر)$ هي أول مشتقة من المشتقات
 المتتالية $m(سر)$ $m'(سر)$ $m''(سر)$ لا تعدم بفرض أن $ج = ٠$
 فلا يكون للمعادلة $m(ج)$ لانهائية كبرى ولا صغرى إذا كانت $ج$ فردية
 وإذا كانت زوجية تكون $m(سر)$ في نهاية كبرى أو صغرى على حسب
 كون $m''(ج)$ سالبة أو موجبة

ولزيادة إيضاح ما تقدم نرسم المنحنى المبين بالمعادلة $ص = m(سر)$ بالنسبة
 لمحورين متعامدين (ش^٣) فضرورية نهايات $m(سر)$ الكبرى والصغرى
 تكون مرتبات النقاط ج د هـ ز التي فيها المماس للمنحنى مواز
 لمحور السينات ومعيناتهم تكون جذور المعادلة $m(سر) = ٠$ (مطابق^٨)



وغير ذلك حيث ان المشتقة تتنازل كلما زادت s حالة كونها اقربية من نهاية
كبيرة فتكون ضرورة مشتقة m (سر) وهي m (سر) سالبة في تلك النقطة
وبالعكس في اقرب من نهاية مغري تتصاعد m (سر) بزيادة s واذا تكون
 m (سر) موجبة

(نظيقات)

$$١. \text{ لتكن } m \text{ (سر)} = s - r \text{ جتا } h + r \text{ فنجد}$$

$$m \text{ (سر)} = s - r \text{ جتا } h$$

$$m \text{ (سر)} = r$$

فن المعادلة $m \text{ (سر)} = 0$ يعني $s - r \text{ جتا } h = 0$ يحدث

$s = r \text{ جتا } h$ وبوضع هذا المقدار في المتعلقة الاندروسة نجد $r \text{ جتا } h$

وهي نهاية مغري لان $m < 0$

r لتكن $m \text{ (سر)} = \frac{s-r}{r}$ فيكون

$$m \text{ (سر)} = \frac{(s-r)s}{r(s-r)} \quad m \text{ (سر)} = \frac{r}{r(s-r)}$$

فن $m \text{ (سر)} = 0$ ينتج $s = 0$ و $s = r \text{ جتا } h$ وبوضع هذين
المقدارين في $m \text{ (سر)}$ يحدث

$$m \text{ (سر)} = 0 \quad \frac{r}{r} = m \text{ (سر)} \quad \frac{r}{r} = m \text{ (سر)}$$

فالمتممة المفروضة نهاية كبرى مساوية لنهاية مغري تعادل $r \text{ جتا } h$

٣. (مثلة) ما الخروط الا كبرجما الارسوم داخل كرة معلومة

ليكن h نصف قطر الكرة و r نصف قطر قاعدة الخروط و s ارتفاعه
فن المعلوم ان حجم الخروط

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 s$$

وحيث ان

$$\text{ص}^{\text{ر}} = \text{م} (٢ \text{ نق} - \text{م})$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \text{ م} (٢ \text{ نق} - \text{م})$$
 وباخذ المشتقة يحدث

$$\text{ح} = \frac{2}{3} \text{ نق} - \text{م} = 0$$
 ومنه $\text{م} = \frac{2}{3} \text{ نق}$ ومنه $\text{ص}^{\text{ر}} = \frac{2}{3} \text{ نق}$ $\text{ح} = \frac{2}{9} \text{ نق}$
 وحيث ان المشتقة الثانية هي

$$\text{ح} = -\frac{2}{3} \text{ نق}$$

فبحم المخروط المطلوب يكون

$$\text{ح} = \frac{32}{81} \text{ نق}$$

ويرى ان نسبته بحجم الكرة تساوى $\frac{8}{17}$

(تقرينات)

المطلوب ان نهايات الكبرى والصغرى للمتعلقة م (م) في

$$٠١ \text{ م (م)} = \text{م}^٥ - ٧٥ \text{ م}^٣ + ١٦٢٠ \text{ م} - ١٠٠٠$$

$\text{م} = ٦$	نهاية كبرى م (٦) =	٢٢٩٦	الجواب
$\text{م} = ٢$	نهاية صغرى م (٢) =	٣٠٧٨	
$\text{م} = ٣$	نهاية كبرى م (٣) =	١٠٨٠	
$\text{م} = ٦$	نهاية صغرى م (٦) =	٢٩٦	

$$٠٢ \text{ م (م)} = \text{م}^٥ - ٢ \text{ م} + \text{الجواب م} =$$

نهاية صغرى م (٠) = ٠

٣. ما المستطيل الاكبر سطحاً المرسوم داخل قطع ناقص

(الجواب) هو ما كانت قاعدته $\text{ح} = \frac{2}{3} \text{ نق}$ وارتفاعه $\text{د} = \frac{2}{3} \text{ نق}$

يفرض ان معادلة القطع الناقص هي

$$\text{ح}^٢ + \text{د}^٢ = \text{ر}^٢$$

فالمسطح المذكور يكون $2 < d$.

(في النهايات الكبرى والصغرى للمعادلات المضمرة)

(بتغيير واحدة)

٦٩ . لتكن m (s د v) $= 0$. المفروض فيها ان v متعلقة

بالمستقلة s . فبقضاء ما قلناه في مطالب ^{٦٩} تأخذ مشتقة هذه المعادلة
وتساويها الصفر فيحدث

$$0 = \frac{\left(\frac{m}{s}\right)}{\left(\frac{m}{v}\right)}$$

ثم نحل المعادتين السابقتين بالنسبة الى s و v ونضع مقاديرهما في
المشتقة الثانية فيحكم بوجود نهاية كبرى أو صغرى على حسب كون المشتقة
الثانية المذكورة سالبة أو موجبة
لتكن مثلا المعادلة

$$v^3 - s^3 + sv^2 - 1 = 0$$

فالمشتقة الاولى تكون

$$(3v^2 - s) \left(\frac{dv}{ds} \right) - 2sv = 0$$

والثانية

$$(3v - s) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{2v^2}{s^3} - 2 \left(\frac{dv}{ds} \right) - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} = 0 \quad (1)$$

فن الشرط $\frac{dv}{ds} = 0$ يحدث $v = 2$ و $s = 2$ وبوضع هذا المقدار
في المفروضة ينتج

$$s = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad \text{ومنها} \quad v = \pm \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

وحيث ان $\frac{dv}{ds} = 0$ تؤول المعادلة (١) الى

$$(3v - s) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{2v^2}{s^3} - 2 \left(\frac{dv}{ds} \right) - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} = 0$$

ويقتصر سر و صر على ما هما يكون

$$\frac{6}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

٧. افترض ان المتعلقة بالطلب تعيين ثباتها تكون مرتبطة بعدة

متعلقات فتلا باثنتي زوها صر و ط وان يكون

$$م (سر د صر د ط د ع) = م (سر د صر د ط د ع) = ٠$$

$$م (سر د صر د ط د ع) = ٠ \quad (١)$$

فاذا امكن محو صر و ط من اثنتين من هذه المعادلات تنتج معادلة مثل

م (سر د ع) = ٠ ويؤول الامر الى ما ذكر في المطلب السابق

والا فخذ من متعلقات المعادلات (١) بفرض ان صر و ط و ع متعلقات

بالمستقلة سر فيحدث

$$٠ = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ط} + \frac{م}{ع} + \frac{م}{سر}$$

$$٠ = \frac{١}{ص} + \frac{١}{ط} + \frac{١}{ع} + \frac{١}{سر}$$

$$٠ = \frac{١}{ص} + \frac{١}{ط} + \frac{١}{ع} + \frac{١}{سر}$$

ويحوي $\frac{م}{ص}$ و $\frac{م}{ط}$ منها مقدار $\frac{م}{ص}$ فساويه للصفر ونجربى العمل

كما تقدم او نجعل في هذه المعادلات $\frac{م}{ص} = ٠$ فيحدث

$$٠ = \frac{م}{ط} + \frac{م}{ع} + \frac{م}{سر}$$

$$٠ = \frac{١}{ط} + \frac{١}{ع} + \frac{١}{سر}$$

$$٠ = \frac{١}{ط} + \frac{١}{ع} + \frac{١}{سر}$$

ثم نحى $\frac{م}{ص}$ و $\frac{م}{ط}$ فنجد معادلة بين سر د صر د ط د ع فيخرج منها

ومن المعادلات (١) مقادير هذه المجاهيل وبوضعها في المشتقة الثانية
 $\frac{1}{6} \frac{r^2}{r}$ يحكم بنوع النهاية

لتكن مثلا المتعلقة ط والمعادلتان

$$r = ط + ص + ٦$$

$$١٢ = ر' + ص' + ط'$$

فتجد

$$(١) \left\{ \begin{array}{l} ٠ = \frac{ط}{6} + \frac{ص}{6} + ١ \\ ٠ = \frac{ط'}{6} + \frac{ص'}{6} + ١ \end{array} \right.$$

وبجعل $\frac{ط}{6} = ٠$ يحدث

$$\frac{ص}{6} = ١ - ر = ص$$

فن المعادلات $٦ = ط + ص + ر$

$$١٢ = ر' + ص' + ط'$$

$$ص = ص$$

يستخرج $ر = ٣$ و $ص = ٢$ و $ط = ٢$

واذا أخذنا مشتقة المعادلتين (١) نجد المشتقة الثانية $\frac{1}{6} \frac{r^2}{r}$ وبوضع
 المقادير السابقة فيها نراها سالبة فبعض المقادير تكون ط في نهايتها الكبرى
 (تة الكميات الصغيرة)

٧١. قد ذكرنا في المطلب ان الكمية الصغرى هي الكمية التي تقرب جدا
 من الصفر فاذا وجدت في مسألة واحدة عدة كميات من هذا النوع فنختب
 منها واحدة ونقابل بها الباقية وحينئذ تسمى هذه الكمية بالكمية الاصلية
 وتسمى الكمية الصغرى ذات المرتبة الاولى كل كمية تكون نهاية نسبتها الى
 الاصلية عددا مينا والكمية الصغرى ذات المرتبة الثانية هي ما تكون نسبتها
 للاصلية كمية صغرى ذات المرتبة الاولى

وعلى العموم نسمي الكمية الصغرى ذات المرتبة النونية الكمية التي تكون
نسبتها الى الاصلية كمية صغرى ذات المرتبة δ — ١ فلا اذا كان
التفاضل ϵ هو الكمية الاصلية وكانت ϵ كمية صغرى ذات المرتبة
الاولى يكون

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon} \quad (\text{ل عددين})$$

ومنه $\epsilon = \epsilon \cdot \epsilon = \epsilon \cdot (\epsilon + \delta)$ (عدد صغير جدا)
وقياسا على ذلك تكون الزيادة δ لا متعلقة δ المقابلة للزيادة الصغيرة
 ϵ من الكميات ذات المرتبة الاولى وكذا التفاضل ϵ لان

$$\delta = \epsilon \cdot \epsilon = \epsilon \cdot (\epsilon + \delta)$$

$$\delta = \epsilon \cdot \epsilon = \epsilon \cdot (\epsilon + \delta)$$

٨٢. لنذكر نظريتين في الكميات المذكورتين هما
(الاولى) لا تتغير نهاية نسبة كيتين صغيرتين اذا تبدلتا بكميتين آخرتين تقرب
نسبتهما للاولين من الواحد

لنكن مثلا ϵ و δ كيتين صغيرتين و ϵ و δ كيتين صغيرتين ايضا حيث

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon} \quad \delta = \frac{\delta}{\delta} \quad (١)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon} \quad \delta = \frac{\delta}{\delta}$$

لان من المعادلتين (١) ينتج $\epsilon = \delta + \epsilon$ ومنه $\epsilon = \delta + \epsilon$

فبفرض ان ϵ تقرب جدا من الصفر كلما تقصت δ و δ او كما يقال

بفرض ϵ كمية صغيرة بالنسبة الى δ وينتج ايضا $\epsilon = \delta + \epsilon$ فبقسمة

هاتين المعادلتين يحدث

$$\frac{\epsilon + 1}{\delta + 1} = \frac{\epsilon}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\delta}$$

$1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$
 بفرض $1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$ كيات صغيرة جدا فحدث

$1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$
 واذا مرنا بالحرف 1^2 لا كيركية من $1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$ فحدث

$[(1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) - (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)]$
 $> (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$

وحيث ان $1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$ يكون $1^2 = (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$
 ومنه

$1^2 = (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$
 وهو المطلوب

الباب الثاني عشر

تطبيقات هندسية

في معادلة المماس والعمود عليه

٧٣. يمكن المنحنى $S - (S^2)$ المرسوم بالنسبة للمعورين المستقيمين
 S و S^2 ومبين بالمعادلة $S = (S^2)$ فاذا أردنا البحث
 عن معادلة المماس في النقطة J المعينة بالاحداثين S و S^2 نأخذ نقطة
 أخرى J' على المنحنى مجاورة الاولى ومعينة بالاحداثين S' و S'^2 ف S و S^2
 $+ S'$ فتكون S و S^2 عبارة عن الزاويتين S و S^2 J J'
 الحادثتين في ان واحد بالاحداثين S و S^2 عند الانتقال من J الى J'
 وتكون معادلة المستقيم $> >$

$$S - S' = \frac{S^2 - S'^2}{S - S'}$$

$$\bar{ص} - \bar{ص} = \bar{ك} (س - س)$$

وحيث ان هذا الخط هو د على المماس فيكون كما هو معلوم في الهندسة الجبرية

$$\bar{ك} = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} = 1$$

ومن هنا

$$\bar{ك} = \frac{1}{\left(\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}\right)} = \frac{\left(\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}\right)}{\left(\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}\right)}$$

فالمعادلة السابقة تتحول الى

$$\bar{ص} - \bar{ص} = \frac{\left(\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}\right)}{\left(\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}\right)} (س - س)$$

$$\text{ومنها} \quad (ص - ص) \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} = (س - س) \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} = 0$$

(ملحوظ) اذا امر المنحنى المميز بالمعادلة م (س، ص) = 0 نقطة الاصل بتعين

المكرر المذكور باخذ نهاية النسبة $\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}$ بفرض ان $س = 0$ لان (مطلب) ^{٣٤}

$$\frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} = \frac{\bar{ص}}{1}$$

٧٥. الخط م د المحصور بين المماس ومرتب نقطة التماس يسمى تحت

المماس والخط ط د يسمى تحت العمود فاذا جعل $ص = 0$ في معادلة

المماس يحدث

$$\bar{ص} - \bar{ص} = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} (س - س)$$

ومنها

$$\bar{س} - \bar{س} = 1 - 1 = 0 = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}$$

واذا فرضنا بالرمز (تم) تحت المماس يكون

$$\text{تم} = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}} = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}$$

وبالنسبة لثمت العمود يحدث

$$\text{نع} = \frac{\text{قر}}{\frac{\text{ما}}{\text{سر}}}$$

وفي المثلين ح ه د د ج ط د القاشي الزاوية نجد

$$\text{ج م} = \left[\text{ص} + \text{تم} \right] \text{د ج ط} = \left[\text{ص} + \text{نع} \right]$$

وبوضع مقدارى تم و نع نجد طول المماس وطول العمود

$$\text{ط م} = \frac{\text{ص} \gamma + 1 \left(\frac{\text{ما}}{\text{سر}} \right)}{\frac{\text{ما}}{\text{سر}}} = \text{ص} \gamma + 1 \left(\frac{\text{ما}}{\text{سر}} \right)$$

$$\text{طع} = \text{ص} \gamma + 1 \left(\frac{\text{ما}}{\text{سر}} \right) \quad (\text{انطبقات})$$

٧٦. ولنطبق هذه القوانين على الهليلجى أى النطع الناقص الذى معادلته

$$0 = \text{أ}^2 \text{ص}^2 + \text{ب}^2 \text{سر}^2 - \text{أ}^2 \text{سر}^2$$

$$\frac{\text{ب}^2 \text{ص}^2}{\text{سر}^2} = \frac{\text{أ}^2 \text{سر}^2}{\text{سر}^2}$$

فنجد

وتكون معادلة المماس

$$\text{ص} - \text{ص} = - \frac{\text{أ}^2 \text{سر}^2}{\text{سر}^2} (\text{سر} - \text{سر})$$

$$\text{أو} \quad \text{أ}^2 \text{ص}^2 + \text{ب}^2 \text{سر}^2 - \text{أ}^2 \text{سر}^2 = 0 \quad \text{ومعادلة العمود}$$

$$0 = \text{أ}^2 \text{ص}^2 (\text{سر} - \text{سر}) - \text{ب}^2 \text{سر}^2 (\text{ص} - \text{ص})$$

ويحدث أيضا

$$\text{تم} = \frac{\text{أ}^2 \text{سر}^2}{\text{سر}^2}$$

$$\text{نع} = \frac{\text{أ}^2 \text{سر}^2}{\text{سر}^2}$$

$$\text{ط م} = \frac{\text{ص}^2}{\text{سر}^2} \left[\text{أ}^2 \text{سر}^2 + \text{ب}^2 \text{سر}^2 \right]$$

$$\left. \begin{array}{r} ٢-٤ \\ ٢-٤ \\ ١ ص + ب م \\ ٢١ \end{array} \right\} \text{طع} =$$

(في السيكالويد)

٧٧. اذا تخرجت دائرة على خط مستقيم بدون زلق (أي سير على الخط بنقطة

واحدة) فاحدى نقط محيطها ترمم منحنيًا يسمى سيكالويد (١)

وينتج من هذا ان السيكالويد يبدو كأعدادها غير نهائى

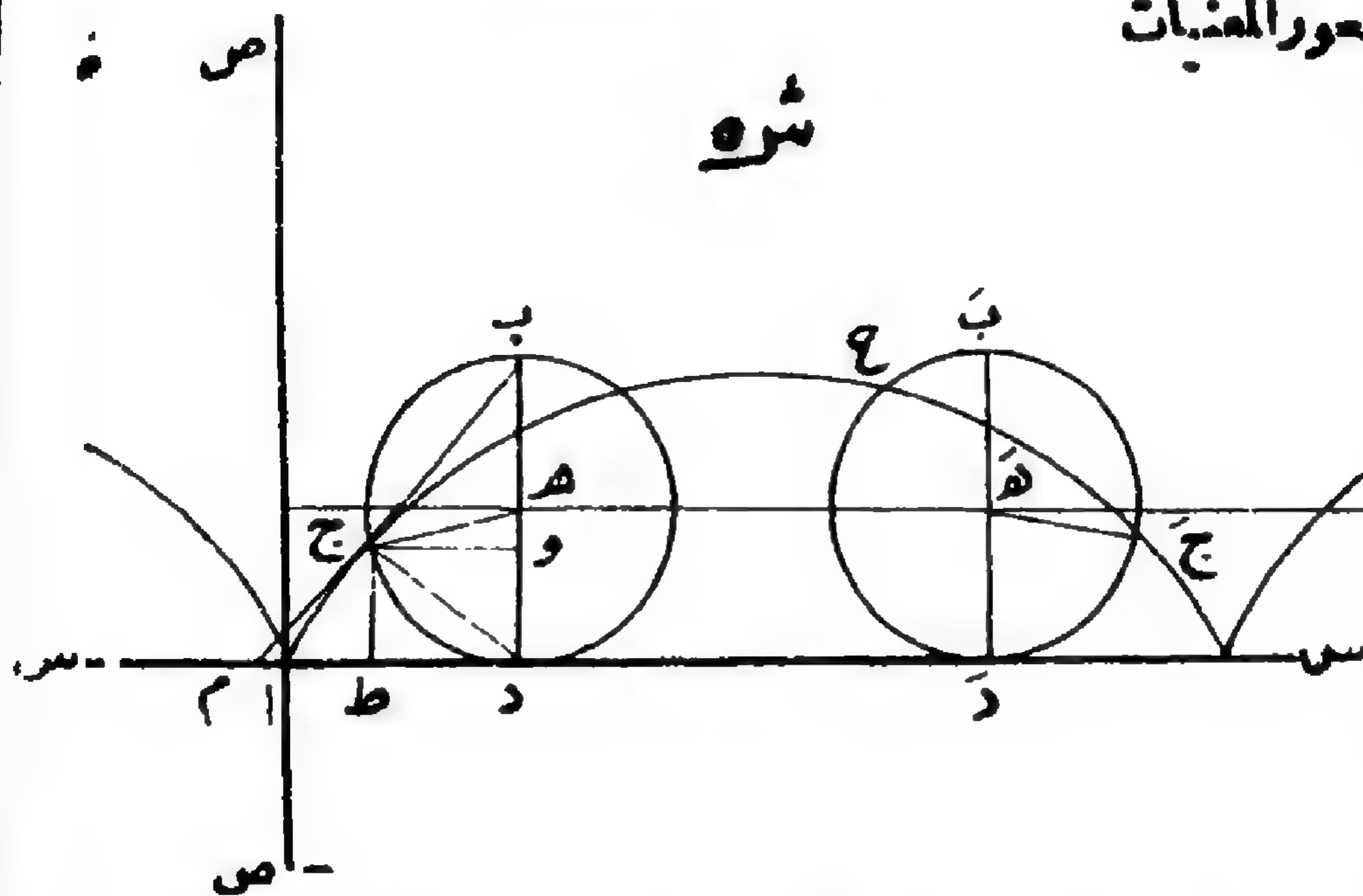
فاذا أخذنا المستقيم المفروض محور السينات واحدى نقط المنحنى الموضوعة

على هذا المستقيم أخذت أصلاً ثم رمز بالحرف ه مركز الدائرة معتبرة في

أحد مواضعها (ش ه) و نق لنصف قطرها و د انقطة تماسها

بمحور المعينات

ش ه



وفرض القوس د ج مساوياً للفصل أ د تكون النقطة ج التي احداثاتها

س = أ ط د ص = ج ط احدى نقط السيكالويد و اذا رمزنا بالحرف ع

لزاوية د ه ج يكون

$$\text{قوس د ج} = \text{نق ع}$$

(١) ينسب اختراع هذا المنحنى لغاليلى الشهير الطليانى (ولدت سنة ١٥٦٤

ومات سنة ١٦٤٢)

ونجد في المثلث هـ ج و القائم الزاوية

$$ج و = نق جا ع ر ه و = نق جنا ع$$

وحيث ان

$$ا ط = ا د - و ح ر د و = د ه - ه و$$

يكون

$$س = نق (ع - جا ع) ر ص = نق (ا - جنا ع)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة يحدث

$$جنا ع = \frac{نق - ص}{نق} ر ع = \frac{نق - ص}{نق} ر جا ع = \frac{ا}{نق}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ا}{نق} \\ \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\} \times$$

وحيث ان القوس ع يمكن أن يكون أصغر من نصف الدائرة أو أكبر منه تبعاً لوجود النقطة ج على النصف الاول أو الثاني لاحد فروع المنحنى فنعطى العلامة \pm للبذر $\left. \begin{array}{l} \frac{ا}{نق} \\ \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}$ في الحالة الاولى وفي الحالة الثانية

نعطى له العلامة - فاذا وضعنا مقدارى ع و حاء السابقين في المعادلة نجد معادلة السيكالويد وهي

$$س = نق نو جنا \frac{نق - ص}{نق} - \frac{ا}{نق} \frac{نق - ص}{نق}$$

ولايجب ادمعالة المماس في النقطة ج تاخذ تقاضل هذه المعادلة فيحدث

$$\frac{نق - ص}{نق} = \frac{ا}{نق} \frac{نق - ص}{نق}$$

$$\frac{ا}{نق} = \frac{نق - ص}{نق}$$

ومن هذا

فالمعادلة المطلوبة تكون بهذا

$$\left\{ \frac{2 \text{ نق}}{\text{ص}} - 1 \right\} (\text{سر} - \text{سر}) = \text{ص} - \text{ص}$$

وعلى ذلك تكون معادلة العمود هي

$$\left\{ \frac{\text{ص}}{2 \text{ نق}} - 1 \right\} (\text{سر} - \text{سر}) = \text{ص} - \text{ص}$$

ويكون

$$\left\{ \frac{\text{ص}}{2 \text{ نق}} - 1 \right\} (\text{سر} - \text{سر}) = \text{ص} - \text{ص}$$

$$\left\{ \frac{2 \text{ نق}}{\text{ص}} - 1 \right\} (\text{سر} - \text{سر}) = \text{ص} - \text{ص}$$

وقد بان من هـ - ا ان تع وسطا متساويا بين د و ب د = 2 نق

ص - فيكون تع = دط ومنه يفتح ان العمود المنشأ من النقطة ج يمر بنقطة التماس د وان المستقيم ب ج هو المماس للسيركلويد في ح لان الزاوية د ج ب قائمة . فلرسم الدائرة ب ج د حينئذ تكون النقطة ج معلومة الوضع تجعل هذه النقطة مركزا وترسم قوس بنصف القطر نق فيقطع المستقيم هـ الموازي لمحور المبيئات الذي بعده منه يساوي نق في نقطة هـ هي مركز الدائرة .

تمرينات

١. لتكن ص' = 2 ع سر معادلة الشلجمي أي القطع المكافئ فتجد

للمماس المعادلة ص' ص = ع (سر + سر) وللعمود (سر - سر) ص

$$+ (\text{ص} - \text{ص}') \text{ع} = 0$$

$$\text{د} = \text{نم} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}} \text{د} \text{نع} = \text{ع} (\text{ثابتة}) \text{د} \text{طع} = \text{ع} (\text{ع} + \text{سر}^2)$$

$$\text{د} \text{طم} = (\text{ع} + \text{سر}^2) \text{سر}^2$$

٢٠. لتكن $\frac{ص}{ص} - \frac{سر}{سر} = ١$ معادلة الهذلولى أى القطع الزائد فتجد

$$\frac{ص}{ص} - \frac{سر}{سر} = ١ \quad \text{والعمود} \quad \frac{ص}{ص} + \frac{سر}{سر} = ١ + ١$$

$$د تم = \frac{ص - سر}{سر} \quad د نع = \frac{ص}{سر} \quad د طم = \frac{ص}{سر}$$

$$\left(\frac{ص}{ص} + \frac{سر}{سر} \right) \times \left(\frac{ص}{ص} - \frac{سر}{سر} \right) = د طم$$

$$\frac{ص - سر}{ص} = ٣ \quad \text{المطلوب تم من المعنى المميز بالمعادلة سر} = \alpha$$

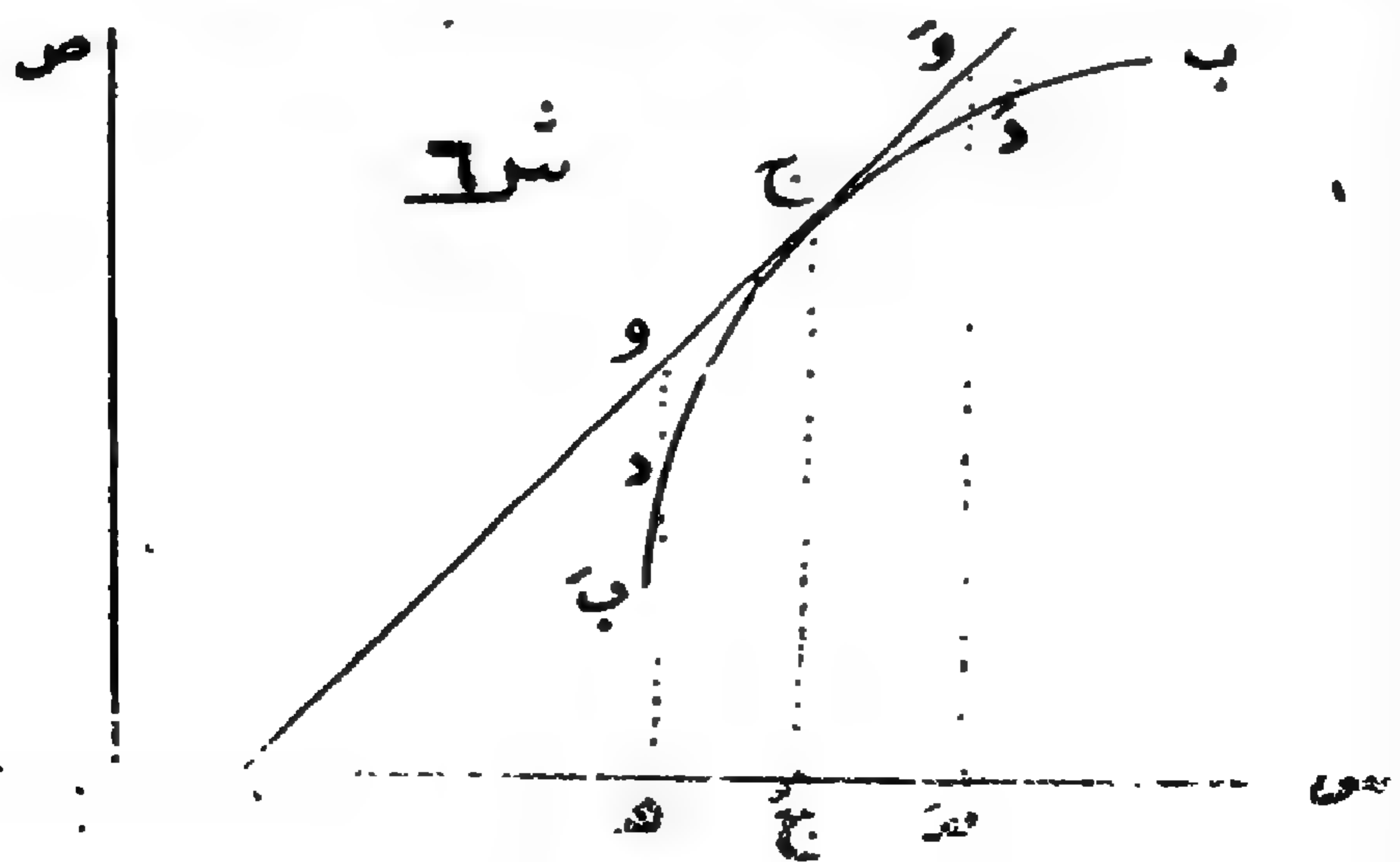
$$\frac{سر}{ص} = ٣ \quad \text{الجواب تم}$$

(فى التجويف والتخديب)

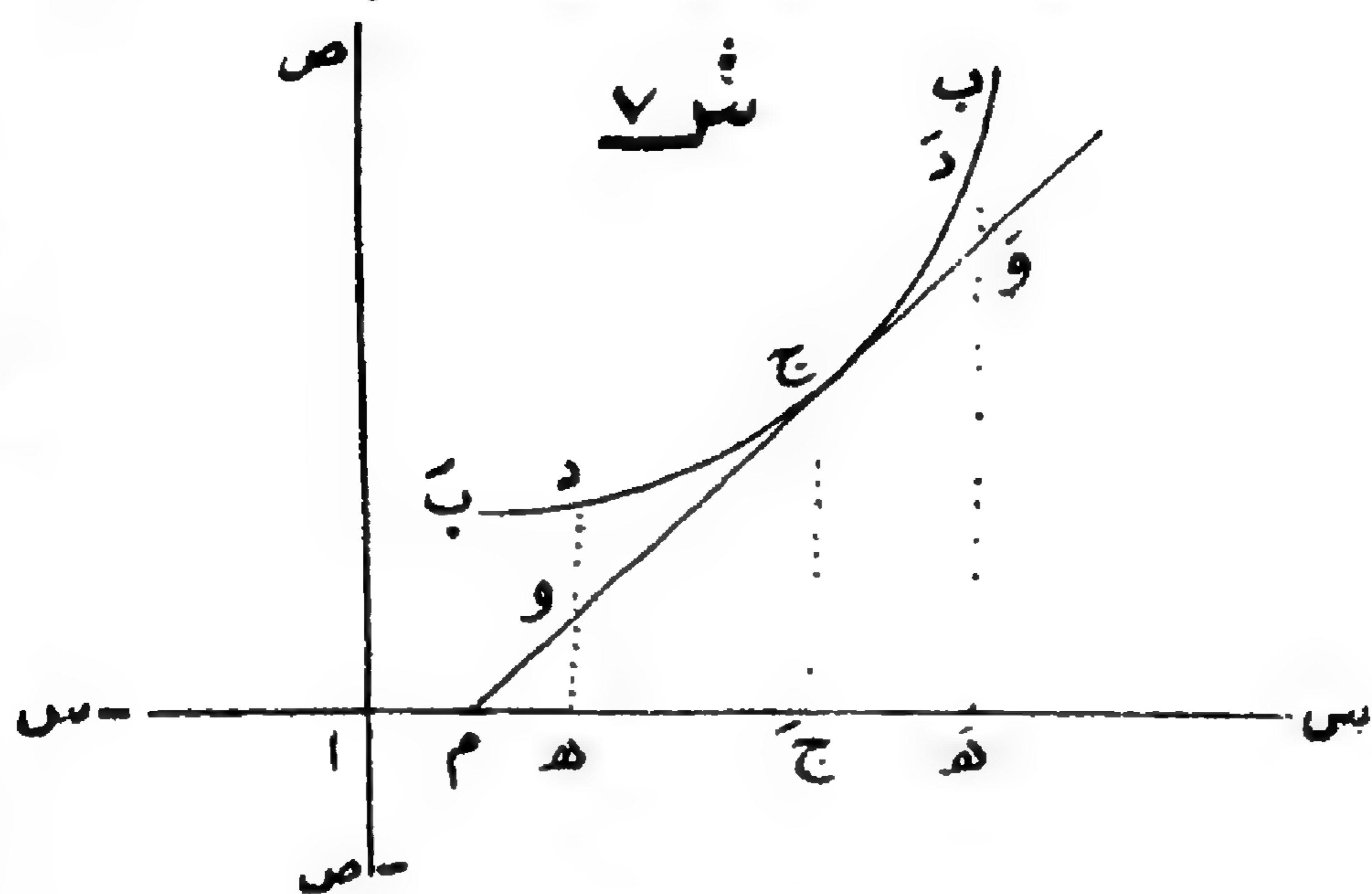
٧٨٠. اذا قورن مرتبة اقطى المعنى ب ب (شـ) المجاورتين لـ نقطة التماس

ج وهما د هـ بالمرتبتين د هـ ر هـ المتقابلين للمماس م ج يمكن ان يعرف هل المعنى المذكور موضوع بالنسبة الى المماس فى الجهة

الموجود فيها النقطة ج التى هى مستط نقطة التماس ج أوفى الجهة الاخرى



ففي الحالة الاولى (ش ٦) يكون الفرقان ده — ده ر ده — وه
 سالين فالمعنى يدور بجو به جهة محور الميقات الذي يعتمد من النقطة م
 الى الجهة التي فيها النقطة ج وأما في الحالة الثانية (ش ٧) فالفرقان
 المذكوران يكونان موجبين والمعنى يدور بتحديد الى الجهة المذكورة



فاذا فرض ان ج ه = ع (ش ٧ و ٦) أعادلة الماء من نصير بجعل س = س + ع

$$ص = ده = ص + ع + \frac{ص^2}{6س}$$

وبواسطة قانون نيولر نجد ما ترتب المعنى المقابل ده

$$ده = ص + ع + \frac{ص^2}{6س} + \frac{ع^2}{12} + \frac{ص^2}{6س} + ب$$

فاذا يكون

$$ده - ده = ع + \frac{ص^2}{6س} + \frac{ع^2}{12} + ب$$

واذا فرضت المشتقة $\frac{ص^2}{6س}$ غير معدومة يمكن أخذ مقدار ع صغيرا كافيا

لكي ياخذ الطرف الثاني علامة الحد $\frac{ع^2}{12}$ والـ $\frac{ص^2}{6س}$ والـ $\frac{ص^2}{6س}$ حيث ان ع

كبيرة موجبة مهما كانت علامة ع فيكون حينئذ $\frac{ص^2}{6س}$ سالبا حينئذ

يكون المنحنى محدباً بجهة المستقيم م س وموجباً في عكس ذلك ويتحقق
بالنظر الى المنحنيات الموضوعة تحت محاور السينات انه يحدث العكس حينما
يكون مرتب النقطة المعتبرة سالبا

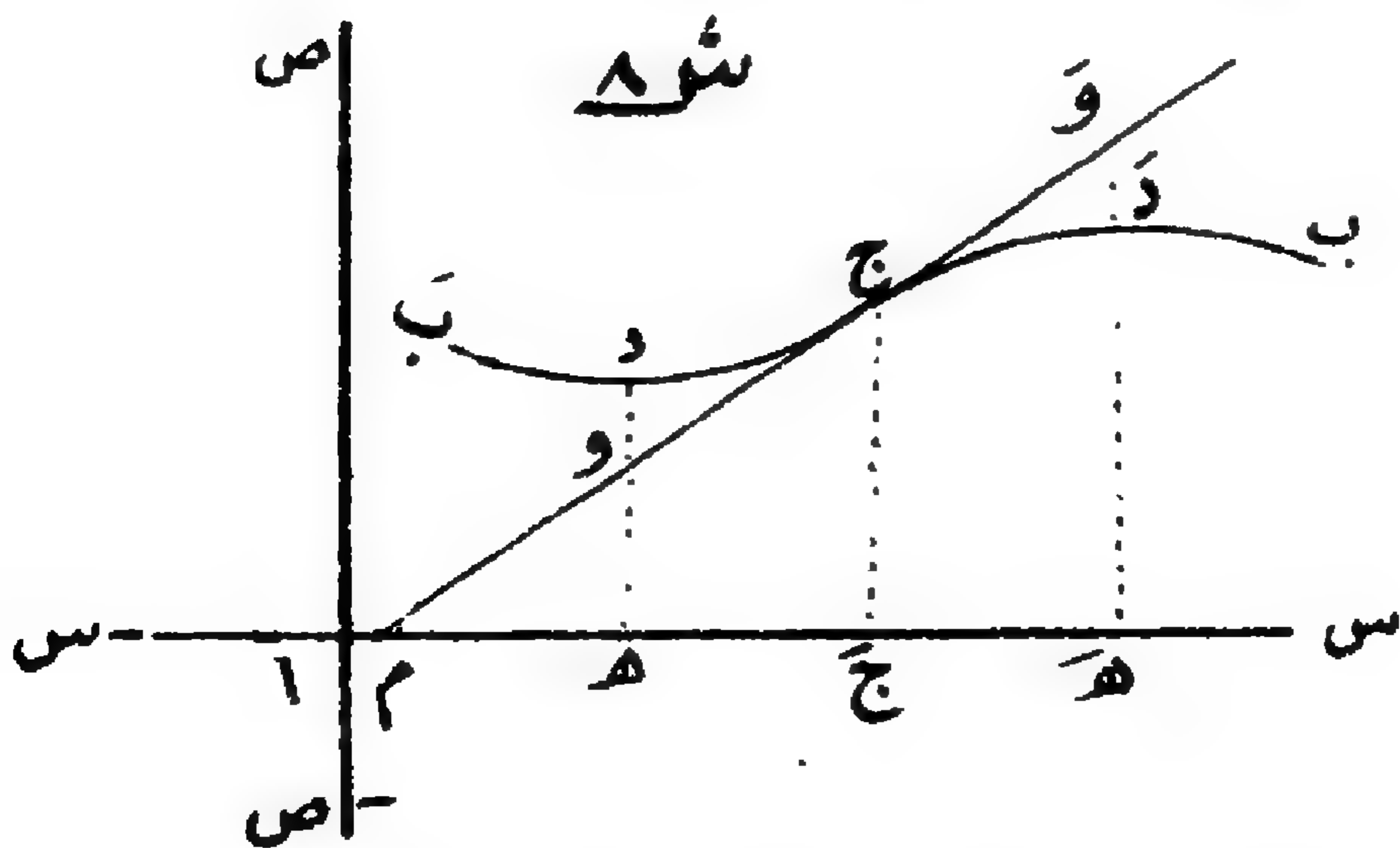
وينتج من هذا ان المنحنى يكون مجوفاً أو محدباً بجهة جزء محاور السينات
المفروض تبعاً لاختلاف المرتب ومشتقة ذات المرتبة الثانية في العلامة أو
اتحادهما فيها

٧٩. قد فرض فيما سبق ان $\frac{v^2}{g}$ غير معدومة فاذا فرضنا هاهنا معدومة
نعتبر متسلسلة تيلور غاية الحد ذي المرتبة الرابعة فنجد

$$d - d' = \frac{v^2}{g} \frac{1}{4} + \frac{v^4}{g} \frac{1}{3} + \dots$$

ثم نفرض ان $\frac{v^2}{g}$ غير معدومة فتتغير علامة الطرف الثاني تبعاً لتغير
علامة v فالمنحنى الذي هو محدب من جهة يكون مجوفاً من أخرى (ش ٨)
أي من جهة محاور السينات والنقطة ج تسمى نقطة التغير

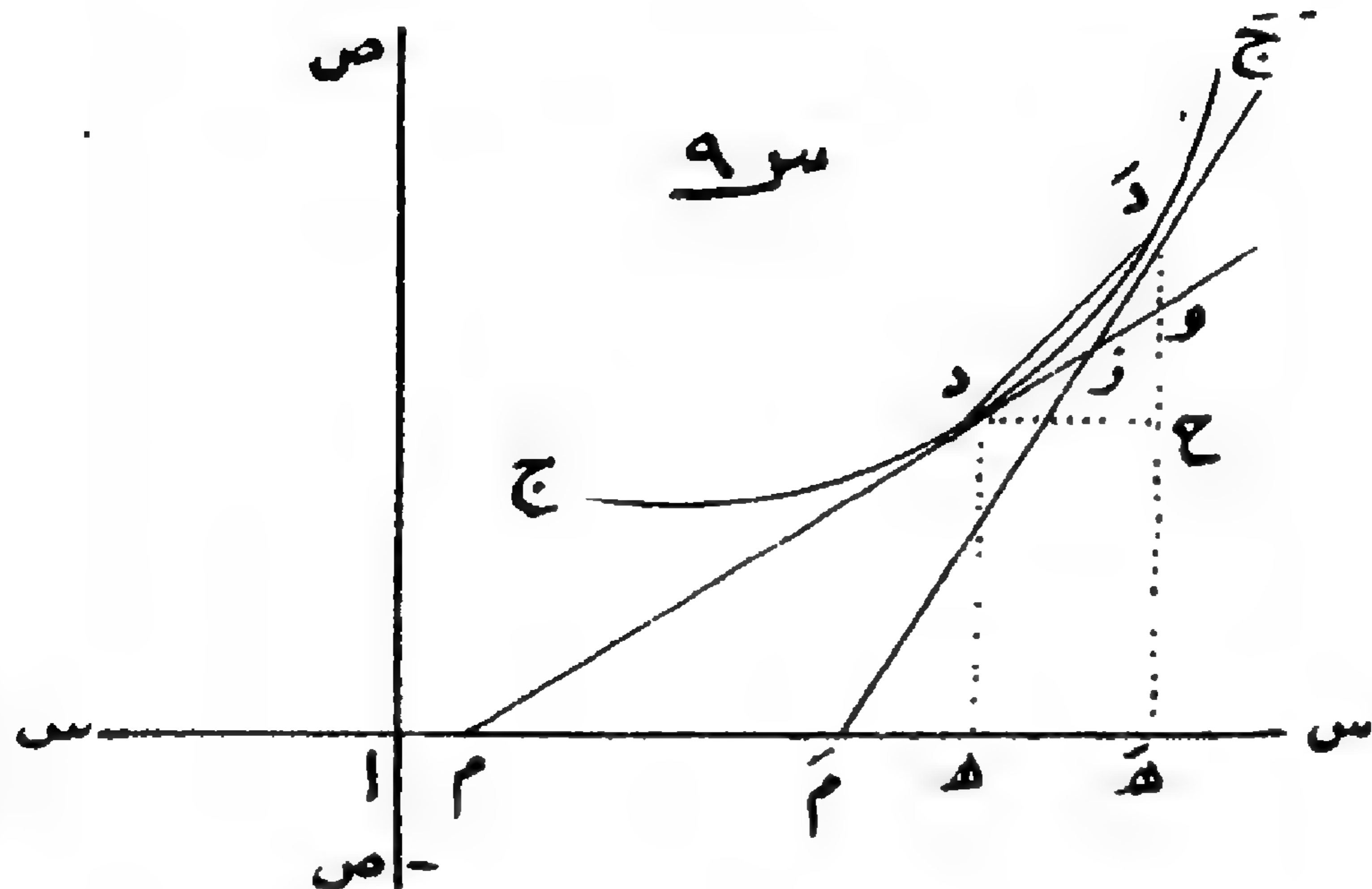
واذا فرضت $\frac{v^2}{g} = 0$ و $\frac{v^4}{g} \neq 0$ (١) يكون المنحنى
موضوعاً في جهة واحدة من المماس أما على بين المرتب ج ج' أو على ياره
وعلامته $\frac{v^4}{g}$ تميز التجوف أو التحذب



(١) العلامة \neq تدل على عدم التساوي كما هو معلوم

الباب الثالث عشر
(في تفاضل قوس لمنحنى مستوي)

٨٠. لنكن $ص = م (س)$ معادلة منحنى مرسوم بالنسبة الى محورين متعامدين فاذا رسمنا بالحرف $و$ اطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة $ج$ (شبه ٩) الى النقطة $د$ ذات الاحداثين $س و ص$ تكون $و$ متعلقة بالتغير $س$



وللبحث عن تفاضل هذه المتعلاقة نفرض ان $س + ف + ص +$
 $ف$ ص احدا ثانيا نقطة ثابتة مثل $د$ تكون قريبة من النقطة $د$ بحيث لا يوجد
 بينهما نقطة تغير فيمكن اعتبار القوس $د د$ الذي نأخذ $و$ رمزها
 منحصرة بين الوتر $د د$ والخط المتكسر $د ز + ز د$ التكون من
 تلاقى المماسين في النقطتين $د و$ وحيث ان $د ز > د ز + د و$
 ومنه $د ز + د ز > د د + د د$ تكون هذه القوس منحصرة
 بالحري بين الوتر $د د و د د + د د$ فاذا رسم $د ح$ موازيا لمجور
 السينات يكون $د ح = ف ص$

و د د = γ ف سر + ف صا وبالفار في المثلث د وح نجد
 وح = د ح طفا و د ح أ و ح = $\frac{\text{ك ص ف سر}}{\text{فا سر}}$ ومنه

$$\text{د و} = \gamma \text{ ف سر} + \frac{\text{ك ص ف سر}}{\text{فا سر}} \text{ و د و} = \text{د ح} - \text{و ح}$$

$$= \text{ف ص} - \frac{\text{ك ص ف سر}}{\text{فا سر}}$$

فيمكن حينئذ كتابة المتباينتين

$$\text{ف ن} < \gamma \text{ ف سر} + \text{ف صا} \text{ و ف ن} > \gamma \text{ ف سر} + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right)$$

$$+ \text{ف ص} - \frac{\text{ك ص ف سر}}{\text{فا سر}}$$

وبالقسمة على ف سر يحدث

$$\frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} < \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right) \text{ و } \frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} > \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right) + \frac{\text{ف ص}}{\text{فا سر}} - \frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}}$$

وبشاهد من هنا أن الطرفين الثانيين يقربان جدا من النهاية $\gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right)$
 كلما قرب ف سر من المة وفيقتد تقرب أيضا النسبة $\frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}}$ من هذه النهاية

وتصير مشتقة القوس γ

$$\frac{\text{ف ن}}{\text{فا سر}} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right) \text{ أو } \frac{\text{ف ن}}{\text{فا سر}} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right) + \text{م} \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right)$$

ومن هنا ينتج التفاضل المطلوب وهو

$$\gamma = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك ص}}{\text{فا سر}} \right) \text{ أو } \gamma = \gamma + \text{ك ص} + \text{فا سر}$$

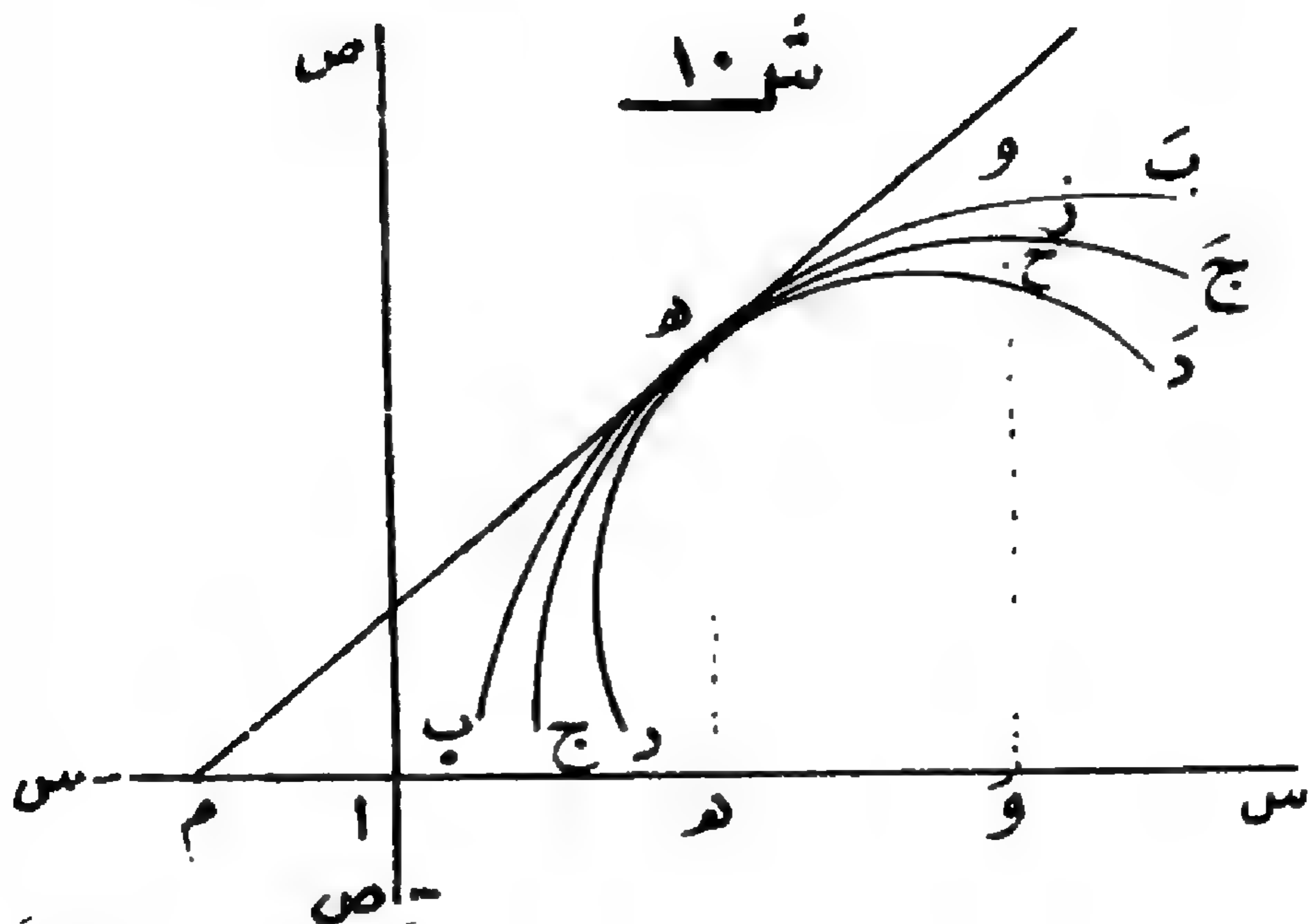
(ملحوظ) حيث أن الوتر د د = γ ف سر + ف صا يكون

$$\frac{\text{ف ن}}{\text{د د}} = \frac{\text{ف ن}}{\gamma \text{ ف سر} + \text{ف صا}}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{\text{ف ن}}{\text{د د}} = \frac{\text{ف ن}}{\gamma \text{ ف سر} + \text{ف صا}} = 1$$

يعني ان نهاية نسبة القوس لوترها تساوي الواحد
(في قياس المنحنيات المستوية)

٨١. لتكن $ص = م (س)$ و $ص = م (س)$ معادلتا المنحنيين
ب ب ر ج ج (ش. ١٠) المارين بالنقطة هـ وليكن س و ص
احداثي هذه النقطة و $س + ع$ معبر النقطتين و و ز الموضوعتين على
المنحنيين المذكورين فيحدث بمقتضى قانون تيلور



$$و = م (س + ع) = م (س) + م (ع) + \frac{م'' (ع)}{1!} + \frac{م''' (ع)}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{م'''' (ع)}{3!} + \dots$$

$$ز = م (س + ع) = م (س) + م (ع) + \frac{م'' (ع)}{1!} + \frac{م''' (ع)}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{م'''' (ع)}{3!} + \dots$$

وحيث ان كلتا المنعقتين $م (س)$ و $م (س)$ تساوي المرقب هـ هـ

فيكون $m = m(s)$ ومن هذا ينتج

$$w - z = w = z = e [m(s) - m(s)] + \frac{e}{12} [m(s)]$$

$$- m(s) + \frac{e}{12} [m(s) - m(s+e)] - m(s+e)$$

وإذا كان المنحنيين مماسين في النقطة هـ [كما هو مفروض في (ش ١٠)]

فإنه على محور المماسات بهلم بأحدى المشتقتين $m(s)$ أو $m(s)$ فتكون

$$m(s) = m(s) \text{ وتؤول المعادلة السابقة إلى}$$

$$w - z = \frac{e}{12} [m(s) - m(s)] + \frac{e}{12} [m(s) - m(s+e)] - m(s+e)$$

$$m(s+e)$$

ويرى من هنا أن فرق المرتبين كمية ذات مرتبة ثانية بالنسبة إلى e فيقال

حينئذ إن المنحنيين هما من المرتبة الأولى وإذا فرض أن المنحنيين $m(s)$

و $m(s)$ مقداراً واحداً يؤل الفرق المذكور إلى كمية ذات مرتبة

ثالثة وهي

$$\frac{e^3}{12} [m(s+e) - m(s+e)]$$

وحينئذ يكون مماس المنحنيين من المرتبة الثانية

ولجعل ذلك عاماً إذا فرض في النقطة هـ أن

$$m(s) = m(s)$$

$$m(s) = m(s)$$

$$m(s) = m(s)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m^{(r)} = m^{(r)}$$

يكون الفرق بين المرتبتين

$$\frac{1+r}{(1+r)!} [m^{(r+1)} - m^{(r+1)}] - \frac{1+r}{(1+r)!} [m^{(r+1)} - m^{(r+1)}]$$

وهو من المرتبة $1 + r$ بالنسبة الى e فتماس المنحنيين يكون من المرتبة النونية

٨٢ . تمكن البرهنة بان كل منحنا اخر مثل d ذي تماس بالمنحن p

مرتبة أقل من مرتبة تماس j به يكون قربه من p (في مجاورة

نقطة التماس h) أقل من قرب j من المنحن p المذكور

لانه اذا فرضت $m = m^{(r)}$ معادلة المنحن d ثم فرض ان رتبة تماسه

بالمنحن p هي j الماخوذة أصغر من r يحدث

$$m^{(r)} = m^{(r)}$$

$$m^{(r)} = m^{(r)}$$

$$m^{(r)} = m^{(r)}$$

.....

$$m^{(j)} = m^{(j)}$$

فاذا يصير

$$z = \frac{1+r}{(1+r)!} [m^{(r+1)} - m^{(r+1)}] - \frac{1+r}{(1+r)!} [m^{(r+1)} - m^{(r+1)}]$$

وبأخذ نسبة البعدين z و h ينتج

$$\text{وز} = \frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{2}}} \left[m^{1+\omega} (s+e) - m^{1+\omega} (s+e) \right]$$

$$\text{وح} = \frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{2}}} \left[m^{1+\omega} (s+e) - m^{1+\omega} (s+e) \right]$$

ويرى من هنا ان ليس $\omega > \text{وح}$ فقط بل نسبتها تصغر حتى تقرب
جدا من الصفر

٨٣. حينئذ يكون المنحنيين تماسا من رتبة زوجية فانهما يتقاطعان في حالة
تماسهما لانه ينتج من المعادلة

$$\text{وز} = \frac{1}{(1+\omega)^{\frac{1}{2}}} \left[m^{1+\omega} (s+e) - m^{1+\omega} (s+e) \right]$$

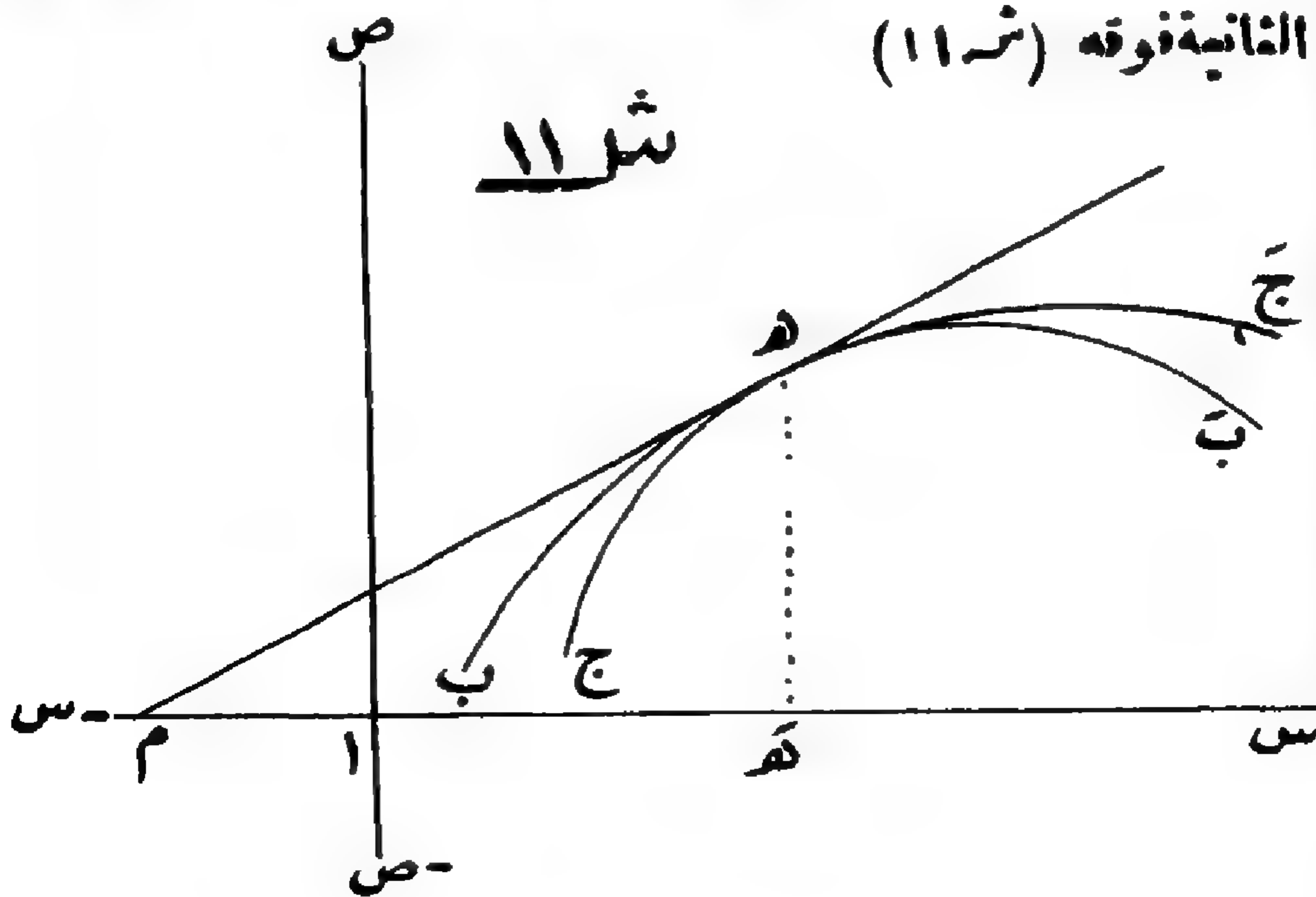
انه مع مديري الصغيرة الموجبة أو السالبة تكون علامة العامل الثاني مثل

علامة $m^{1+\omega} (s) - m^{1+\omega} (s)$ ولكن اذا كان ω زوجيا فعلامته

$e^{1+\omega}$ غير متغيرة علامة e ويؤخذ من هذا ان المنحنى ج ج يكون

موضوعا من احدى جهتي المربع ه ه تحت ب ب ومن الجهة

الثانية فوقه (نظر ١١)



وإذا كانت رتبة التماس فردية وتغيرت علامة ϵ حفظ المقادير السابق
علامته و ينتج من هذا أن أحد المتحنيين يحيط بالآخر (نم ١٠)
(في المتحنيات الالتصافية)

٨٤. لنكن $ص = م (س)$ معادلة عامة للمتحنيات من نوع معلوم فهي
تحتوي على عدة ثوابت اختيارية يمكن إيجادها إذا فرضنا أن أحد المتحنيات
تماساً نحن معلوم من أعلى مرتبة فإذا كان مثلاً $١ + ٥$ هو عدد الثوابت
يكون ٥ مرتبة التماس ونجد المعادلات

$$م (س) = م (س)$$

$$م (س) = م (س)$$

$$م (س) = م (س)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$م (س) = م (س)$$

التي عددها يساوي عدد الثوابت في واسطتها فنجد مقادير الثوابت المذكورة
وبوضعها في المعادلة $ص = م (س)$ يحدث معنى يسمى بالمتحني الالتصافي
(في الدائرة الالتصافية)

٨٥. إذا اعتبرنا مثلاً الدائرة التي معادلتها العامة

$$(س - ٥) + (ص - د) = ٢ق$$

يفرض أن $د$ و ٥ إحداثيات مركزها و $ق$ نصف قطرها أولاً نطلب أن التماس
من المرتبة الثانية بما أن عدد الثوابت الاختيارية ثلاثة فنجد باخذ تفاضل
هذه المعادلة مرتين

$$س - ٥ + (ص - د) = \frac{٦ص}{٦س}$$

$$١ + \frac{٦ص}{٦س} + (ص - د) = \frac{٦ص}{٦س}$$

نعمل حسب ما تقدم فيبقى أخذ $ص$ و $\frac{٦ص}{٦س}$ و $\frac{٦ص}{٦س}$ مساوية $م (س)$

د م (س) د م (س) تم نحل المعادلات الناتجة بالنسبة الى د و د نق
ولكن يمكن إيجاد المطلوب باخذ م مقادير الثوابت المذكورة من المعادلات
السابقة باعتبار أن س د و د $\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$ و $\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$ منسوبة الى نقطة التماس
في المنحنى م = م (س) فنجد

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}{\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} = د - س \\ \frac{1 + \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}{\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} = س - د \\ \frac{1 + \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}{\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} = \pm = نق \end{array} \right.$$

وبواسطة هذه القوانين يوضع مركز الدائرة الاتصافية ويعلم مقدار نصف
قطرها اما علامة القانون الاخير فانه تكون + أو - على حسب كون

$\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$ موجبة أو سالبة
٨٦ . ينتج من المعادلة

$$س - د + (د - س) \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = ٠$$

ان احداني المركز (د د) يحققان المعادلة

$$س - س = \frac{1}{\frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} (س - س)$$

$$أو س - س + (س - س) \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = ٠$$

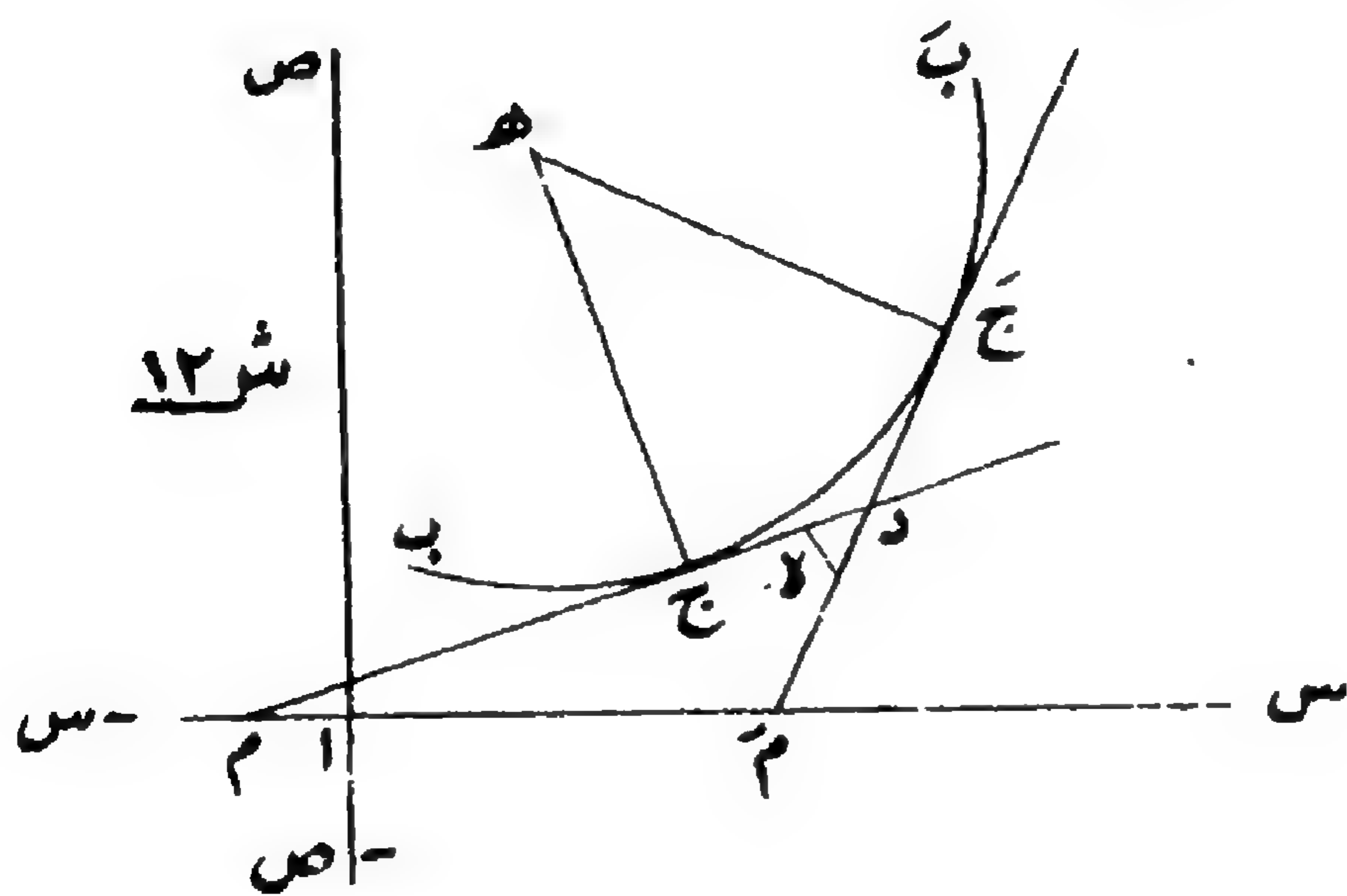
وهي معادلة التام - مود على المماس فاذا يكون مركز الدائرة الاتصافية
موضوعا على العمود المذ كود وينتج لنا أيضا من ملاحظة ان للمنحنى والدائرة

مما واحد في نقطة التماس

(ملحوظ) غالباً يكون تماس الدائرة الالتصافية بالمحني من مرتبة زوجية
فيمتقاطعان بمجرد الملامسة وفي بعض النقط مرتبة التماس تكون أعلى من
الثانية كما في رؤوس المقطع الناقص فلا يتقاطعان حينئذ إذا كانت رتبة
التماس فردية

(في انحاء المصنفات)

٨٧. تسمى المنهات القوس ج ج (ش ١٢) الزاوية م د م الملائكة
من تلاقي المماسين في طرفي هذه القوس وهذه الزاوية في الدائرة متساوي
زاوية نصف القطر ه ج ر ه ج فتكون حينئذ هذه الزاوية والقوس
ج ج متساويين



أعني انه في دائرة واحدة تكون نسبة الرادية م د م الى القوس ج ح
كيفية ثابتة فلذا نأخذ مماسا لالمنحناء القوس المساوي للواحد ونسمي المنحناء
الدائرة وبأخذ ن ق مركزا لنصف قطر و ف زاوية م د م
والقوس ج ح يحدث

$$f = f_0 \quad \text{و منه} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0}$$

أعني ان انحناء الدائرة يساوي مكر نصف قطرها

والنسبة $\frac{ق}{نق}$ التي تغير في أى منحني بتغير لنوس $ق$ في المفرضة تسمى

الانحناء المتوسط لهذه لنوس ويسمى نصف قطر الانحناء المتوسط نصف قطر

الدائرة التي انحناءها يعادل $\frac{ق}{نق}$ الذي يوجد بواسطة القانون $نق = \frac{ق}{\frac{ق}{نق}}$

واذا فرضنا ان النقطة ج تقرب جدا من ج فالنسبة المذكورة تقرب من
نهاية يقال انها انحناء المنحني في النقطة ج وهي مساوية لانحناء الدائرة التي
نصف قطرها

$$نق = ج هـ = \frac{ق}{\frac{ق}{نق}}$$

ولا يصح اذ مقدار $نق$ بواسطة احد اني النقطة ج نلاحظ ان الزاوية هـ
تساوي فرق زاويتين ج م س ر ج م س فاذا فرضنا الاول بالمرف
ل تكون الثانية ل + فل واذا نصيرة = ف ل ويكون

$$نق = ج هـ = \frac{ق}{ل} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل}}$$

وحيث ان $طا ل = ل = \frac{ق}{ل} = صر أو ل = قو طا صر$

$$ج هـ = ل = \frac{ق}{ل} = \frac{\frac{ق}{ل}}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{ل} = ج هـ$$

وحينئذ يكون

$$نق = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1}$$

وبشا من هـ ان نصف قطر الانحناء يعادل نصف قطر الدائرة لالتصافية
فاذا تسمى هـ الدائرة دائرة الانحناء أيضا وهي كزها ص كز الانحناء الزاوية

الصغيرة جدا \angle زاوية القوس

الباب الرابع عشر

(في المنتشرات والانتشارات)

٨٨. المنحنى المنتشر هو المسير الهندسي اراكزا انحناءه منحنى معلوم وتعيين معادلته بمعدوالا حداثين s و r من نقطة القوس من معادلة المنحنى المقروض وهي $m (s, r) = 0$ ومن المعادلتين

$$(ب) \begin{cases} s - r = \frac{r^2}{2\rho} (d - r) + \frac{r^3}{6\rho^2} \\ 1 + \frac{r^2}{2\rho^2} (d - r) + \frac{r^3}{6\rho^3} = 0 \end{cases}$$

فيهما نجد ارتباطا بين (s, r) يوافق جميع مراكزا الانحناء وحيث ان يوافق معادلة المنحنى الذي هو مسيرها الهندسي

٨٩. اذا اعتبرنا r متعلقة بالتغير s ومعلومه بمعادلة المنحنى فالمعادلتان (ب) تعينان s و r بواسطة المتغيرة المذكورة فيمكن ان يستخرج منهما مشتقتان $\frac{ds}{dr}$ و $\frac{dr}{ds}$ وحيث ان توجد مشتقة المراتب r بالنسبة الى s فباخذ تفاضل الاولى يحدث

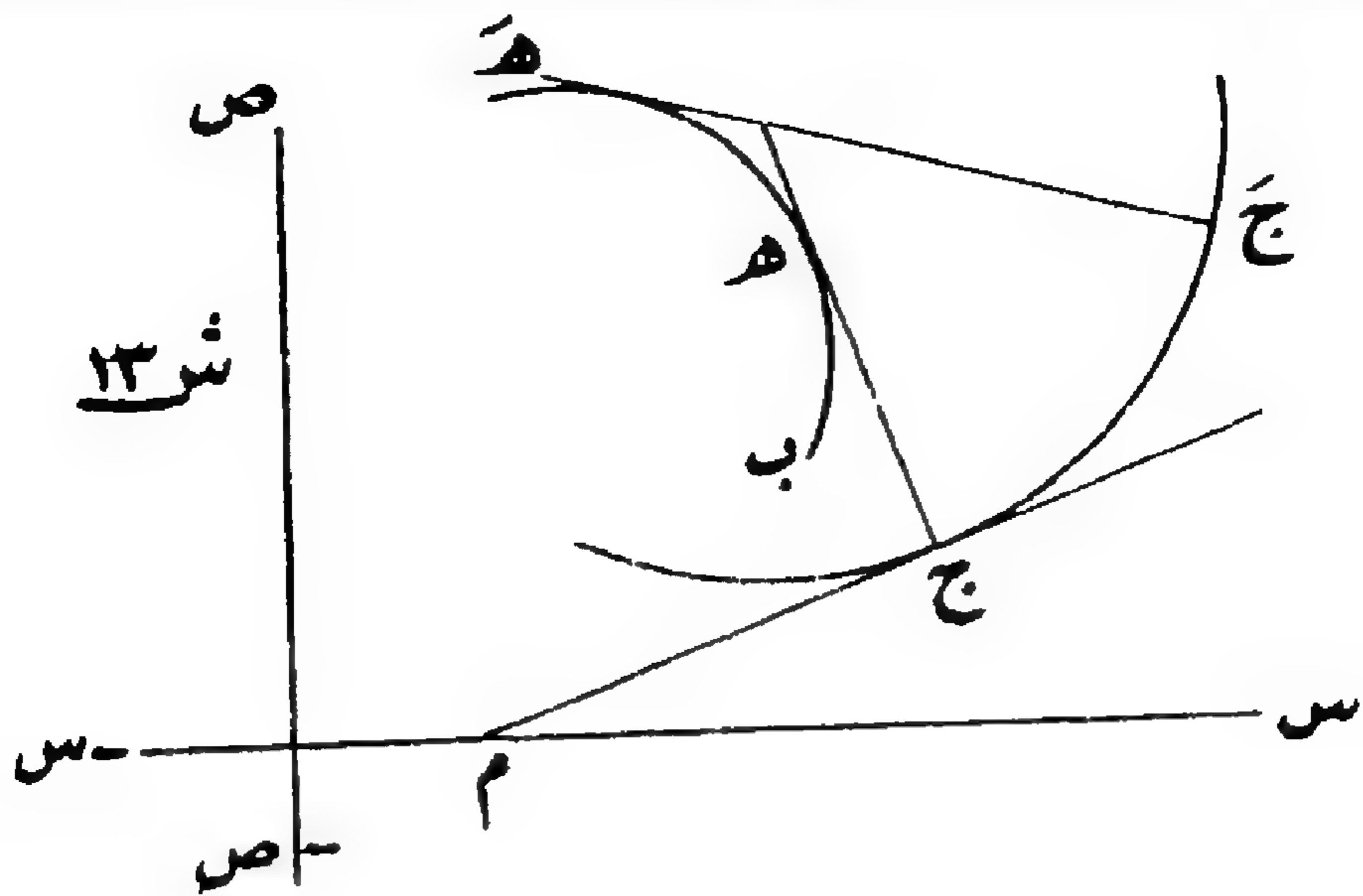
$$1 + \frac{r^2}{2\rho^2} (d - r) + \frac{r^3}{6\rho^3} = \frac{ds}{dr} \frac{dr}{ds} - \frac{ds}{dr} + \frac{r^2}{2\rho^2} \frac{dr}{ds} - \frac{r^3}{6\rho^3} = 0$$

وبحذف الحدود المتشابهة بموجب المعادلة الثانية تتوول هذه المعادلة الى

$$0 = \frac{ds}{dr} + \frac{r^2}{2\rho^2} \frac{dr}{ds}$$

$$0 = 1 + \frac{r^2}{2\rho^2} \frac{dr}{ds}$$

وننتج من هذه المعادلة ان المماس $ج$ م (ش ١٣) للمنحنى المقروض يكون عمودا على مماس المنحنى المنتشر في النقطة المقابلة اعني ان نصف قطار الانحناء $ج$ ه يسد ثما المنتشر



٩٠ . وبأخذ تفاضل المعادلة

$$(س - د) + (ص - د) = نقي$$

باعتبار د د نقي متغيرات بالمغيرة يحدث

$$\frac{نقي}{ص} = \left(\frac{د}{ص} - \frac{د}{ص} \right) (د - ص) + \left(\frac{د}{ص} - ١ \right) (س - د)$$

وبحذف الحدود المتشابهة بمقتضى المعادلتين (ب) يكون

$$\frac{نقي}{ص} = \frac{د}{ص} (د - ص) + \frac{د}{ص} (س - د)$$

وبوضع مقادير س - د - ص - د نقي المعلومة من اقونين (ا)
ثم حذف العامل المشترك وهو

$$\frac{١ + \frac{د}{ص}}{\frac{د}{ص}}$$

$$\frac{\frac{د}{ص} - \frac{د}{ص}}{\frac{د}{ص} + ١} = \frac{نقي}{ص}$$

يكون

وبوضع - $\frac{د}{ص}$ بدلا عن $\frac{د}{ص}$ يحدث بقطع النظر عن العلامة

$$\frac{نقي}{ص} = \frac{١ + \frac{د}{ص}}{\frac{د}{ص} + ١}$$

$$\text{ومنه } 6 \text{ نق} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

وبالرمز بالحرف v للقوس b هـ المعبر من نقطة ثابتة b السكينة على المنتشر يكون

$$6 \text{ نق} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

ومنه $6 \text{ نق} = 6 \text{ و } (نق - v) = 0$
فاذا يكون بفرض $ث$ كمية ثابتة

$$نق - v = ث$$

ونجد أيضا بالنسبة لنقطة أخرى

$$نق - v = ث$$

فيكون

$$نق - v = نق - v \text{ أو } نق - نق = v - v$$

أعني أن القوس هـ السكائن بين نقطتين من المنتشر يساوي في المقدار فرق نصفي قطري الانحناء المقابل في هاتين النقطتين

فاذا فرضنا خطا ينال غير قابل للانداد طول له يساوي $ج$ هـ ثم فرضنا ان احد طرفيه ثابت في النقطة هـ وأنه هو منطبق على نصف القطر $ج$ هـ

فاذا تحرك هذا الخط بحيث يمر جز منه على القوس هـ هـ فطرفه المماس يرسم المنحنى $ج$ هـ أعني انه بواسطة نشر أقواس المنحنى b هـ الى

خطوط مستقيمة يمكن رسم المنحنى $ج$ هـ ولهذا يسمى بالمنحنى المنتشر والمنحنى

$ج$ هـ يسمى انتشاره

(ملحوظ) لا يكون لمنحنى الامتشر واحد ويكون له عدة انتشارات لانه يمكن اطالة الخط المذكور وتقصيره كما يراد

(تطبيقات)

٩١. لتكن معادلة القطع الناقص

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1$$

نباخذ تقاضاهما مرتين يحدث

$$a^2 x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = 1$$

$$a^2 x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2 y^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 = 1 - a^2 x^2 - b^2 y^2$$

ومن الأولى ينتج

وبوضع هذا المقدار في الثانية يحدث

$$a^2 x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2 y^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 = 1 - a^2 x^2 - b^2 y^2$$

ومن ١.٥

فيكون نصف قطر الانحناء

$$\frac{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{3/2}}{a^2 b^2} = \text{نق}$$

وبمقارنة هذا المقدار بمقدار العمود وهو

$$\frac{(a^2 x^2 + b^2 y^2)^{3/2}}{a^2 b^2} = \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{a^2 b^2}$$

$$\text{نق} = \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{a^2 b^2}$$

أعني أن نصف قطر الانحناء في القطع الناقص يعادل مكعب العمود مقسوما

$$\text{على مربع } \frac{b^2}{a^2} \text{ أي على مربع نصف العمود (١)}$$

١١٣

(١) تجدد في المطالب طريقة هندسية سهلة لايجاد مركز الدائرة الالتصافية

ونصف قطرها في المنحنيات المخروطية

٩٢. اداوضه نامقداری $\frac{ص}{ا}$ و $\frac{ص}{ب}$ في القانون (ب)
(مطلب ٨٨) يحدث

$$ص - و = \frac{ص (ا ص + ب ص)}{ا ب}$$

ومنه

$$و = \frac{ص [ا ص - ب (ا ب - ب ص)]}{ا ب}$$

ويجعل $ا - ب = ج$ نجد

$$و = \frac{ص ج}{ا ب}$$

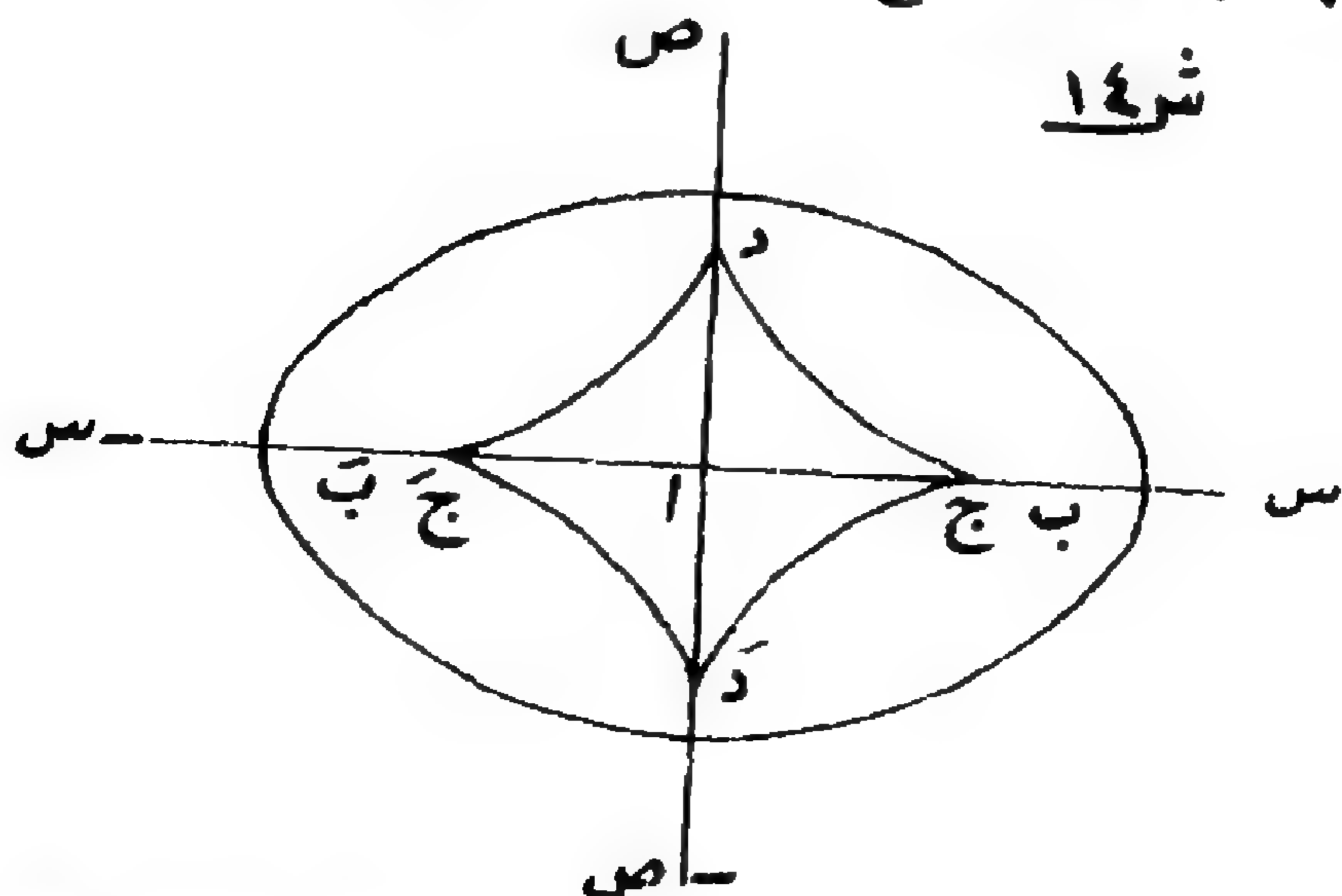
وبالمثل يكون $س = \frac{ص ج}{ا ب}$

واذا اخذنا مقداري $س$ و $و$ من هاتين المعادلتين وضعتاهما في معادلة المنحنى المقروض يكون

$$\frac{ص}{ا} = \frac{ص}{ب} + \frac{ص ج}{ا ب}$$

وهذه هي معادلة المنتشر

ويشاهد من هذا ان هذا المنحنى متشككون من أربعة فروع موضوعة على نظم واحدة بالنسبة لمحوري النطح الناقص (ش ١٤)



فيهما ب بالكمية — ب فنجعل نصف قطر الانحناء

$$\text{نق} = \frac{(ا^2 + ب^2)^{\frac{3}{2}}}{ا^2 ب} = \frac{ا^3}{ب^2} \text{ طم}$$

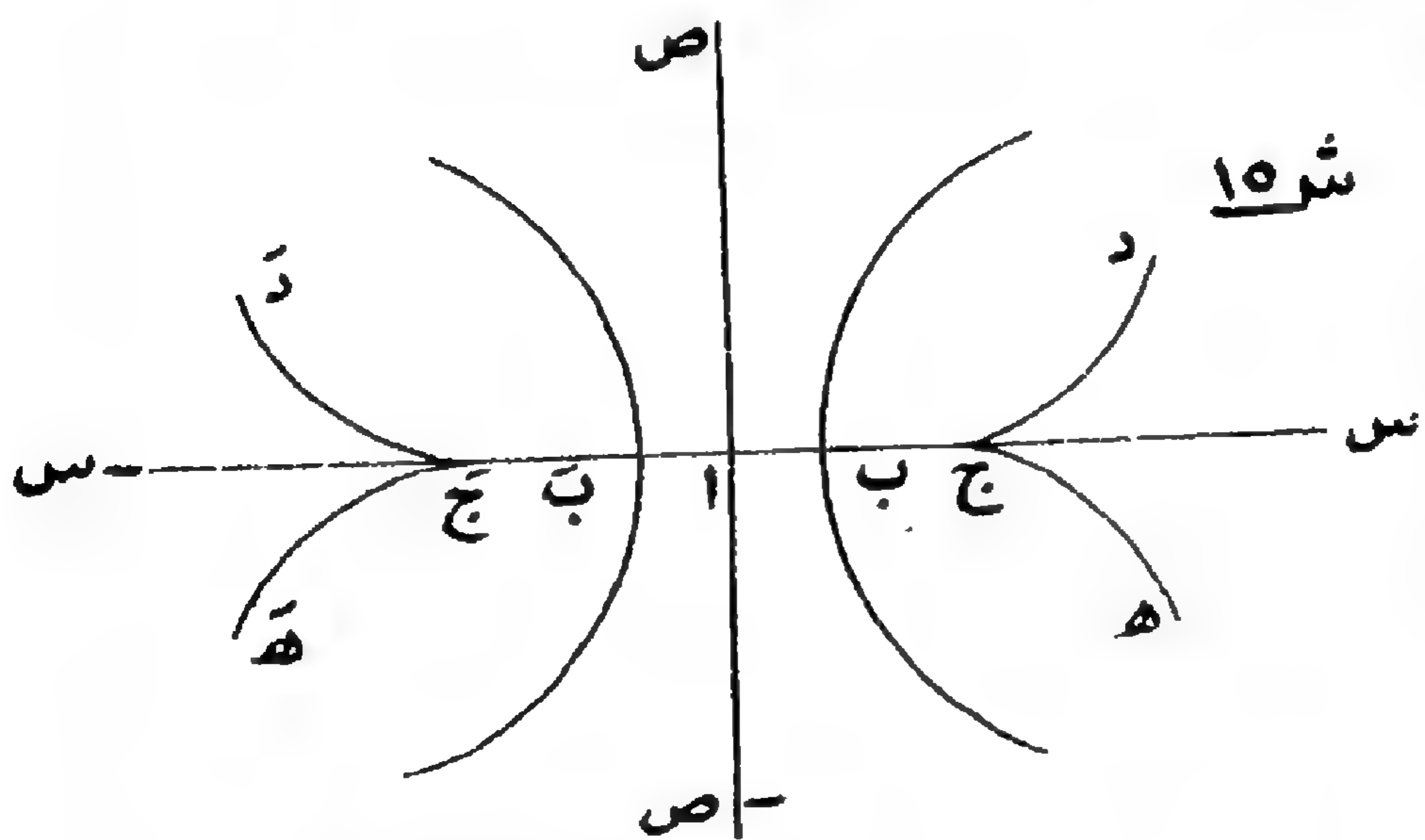
ومعادلة المنتشر

$$\frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} = (ا + ب)$$

ويمثل المناقشة السابقة نجد ان المنتشر يتكون من فرعين غير متيين د هـ

د هـ (ش ١٥) محددتين من جهة محور القطع ويسان هـ هذا المحور

في النقطتين ج ج الموضوعتين خارج البورتين ب و ب



٩٤. لتكن صا = ع سر معادلة القطع المكافئ فيكون

$$\frac{ع}{ص} = \frac{ع}{ص} \text{ و } \frac{ع}{ص} = \frac{ع}{ص} \text{ و } \frac{ع}{ص} = \frac{ع}{ص}$$

ويوضع هذا المقدار في قانون نصف قطر الانحناء يحدث

$$\text{نق} = \frac{(ع + ص)^{\frac{3}{2}}}{ع} \text{ أو } \text{نق} = \frac{ع^3}{ص^2} \text{ طم}$$

لان المودين اوى $\sqrt{ع + ص}$

وبوضع مقدارى المشتقتين $\frac{6}{3} \sqrt{d}$ و $\frac{6}{3} \sqrt{e}$ فى المعادلة الثانية (ب) المطلوب يكون ^{٨٨}

$$\sqrt{d} - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{d} + \sqrt{e}}{3}$$

ومنه

$$\sqrt{d} = \frac{2\sqrt{d} + \sqrt{e}}{3}$$

ويوجد أيضا

$$\sqrt{e} - \sqrt{d} = \frac{\sqrt{d} + \sqrt{e}}{3}$$

ومنه

$$\sqrt{e} = \frac{2\sqrt{d} + \sqrt{e}}{3}$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج

$$\sqrt{d} = \frac{2}{3} \sqrt{e} \quad \text{و} \quad \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d}$$

فاذا وضعنا هذين المقدارين فى معادلة القطع المكانى يحدث بعد حذف العامل ع

$$\frac{2}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d} \quad \text{أو} \quad \sqrt{e} = \sqrt{d}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d} \quad \text{أو} \quad \frac{2}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d}$$

وهى معادلة المنتشر

واذا أخذنا تفاضل المعادلة الاولى نجد

$$\frac{1}{3} \sqrt{e} - \frac{1}{3} \sqrt{d} = \frac{2}{3} \sqrt{d} - \frac{2}{3} \sqrt{e} \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d}$$

وبعمل التفاضل مرة ثانية نجد

$$\frac{1}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{3} \sqrt{e} = \frac{2}{3} \sqrt{d}$$

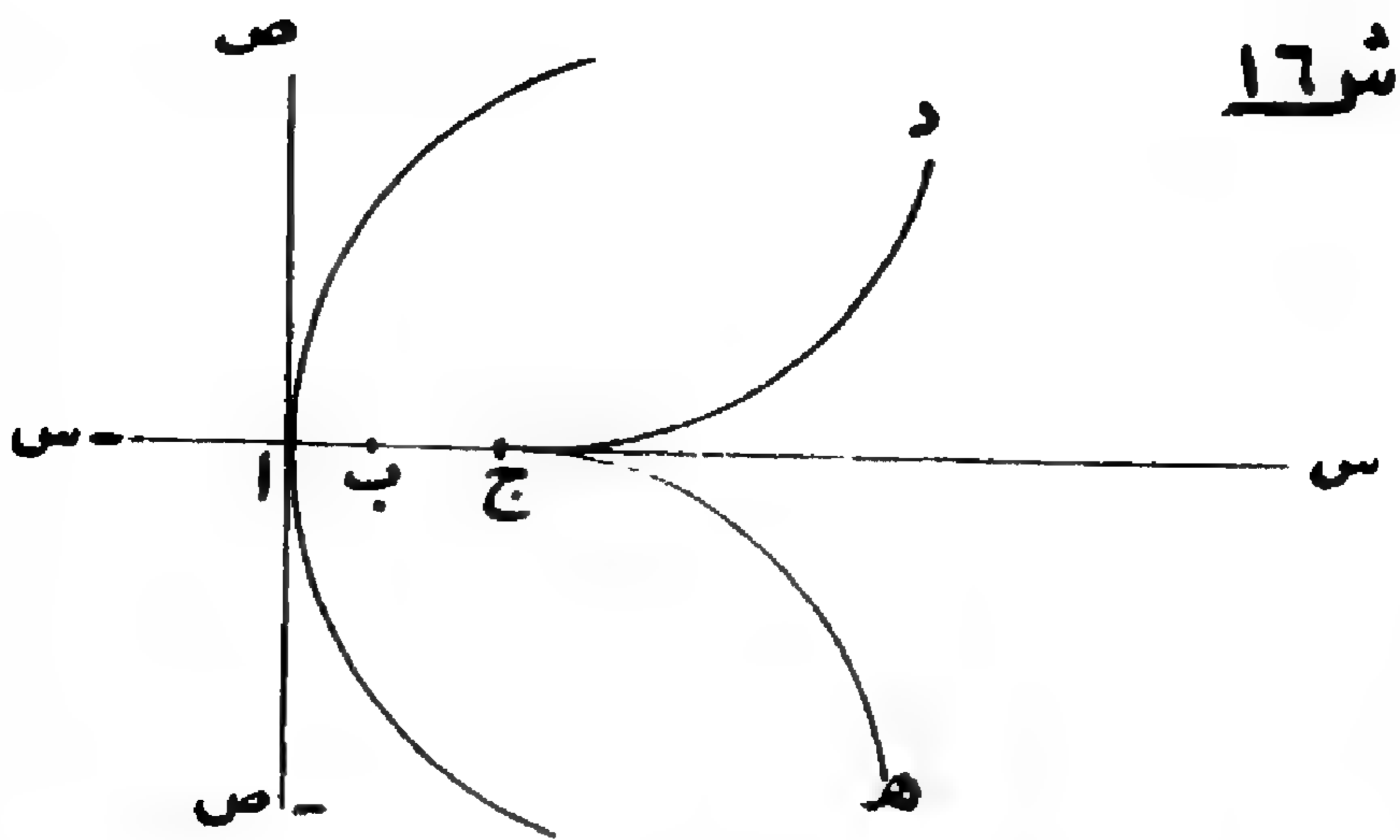
وبذا يظهر ان المنتشرية تكون من الفرعين ج د ر ج هـ (شبه ١٦)

المحدد بين جهة محور العينا لان $\frac{2}{3} \sqrt{d}$ و $\frac{2}{3} \sqrt{e}$ متحدان لعلامة وفى نقطة

تلاقيه بالمحور المذكور يكون

$$\sqrt{d} = \sqrt{e} \quad \text{و} \quad \sqrt{e} = \sqrt{d}$$

ويؤخذ من هنا ان هذا المحور يكون مماسا لمنتشر فى تلك النقطة



٩٥ . افترض الآن معادلة السيكلويد

$$س = ح \text{ قوس جتا } \frac{ح - ص}{٢} - \frac{٢}{٢} ح ص - ص$$

الموضوع فيها ح عوضا عن نقي

٧٧
حيث تقدم في المطلب ان

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} - \frac{٢}{٢}$$

وبعد ترتيب الطرفين يكون

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} - \frac{٢}{٢}$$

وبأخذ التفاضل

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} \cdot \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$$

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$$

ومنه

فنصف قطر الانحناء يكون

$$نقي = \frac{(\frac{٢}{٢})}{\frac{٢}{٢}} = \frac{٢}{٢}$$

الجديد أ يكونان $\gamma = \delta - \epsilon$ نجد

$$\delta = \gamma = \delta - \epsilon \quad \delta - \epsilon = \delta - \epsilon + \delta$$

بقرض ان $\delta - \epsilon$ احد اثنا النقطة ج بالنسبة الى المحورين الجديدين
فتؤول المعادلة السابقة الى

$$\gamma = \delta - \epsilon \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

$$\text{أو } \delta = \gamma \quad (\gamma = \delta - \epsilon) \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

وحيث ان جيبى متممى قوسين مكاملتين متساويان ومختلفان في العلامة
فيحدث

$$\gamma = \delta - \epsilon \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

وتصير معادلة المنتشر

$$\gamma = \delta - \epsilon \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

ويؤخذ من هنا ان منتشر السيكالويد هو سيكالويد آخر مثل الاول
٩٧ • ملاحظة ان نصف قطر الانحناء في النقطة ا معدوم يحدث (نصف ١٧)

$$\gamma = \delta - \epsilon \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

وحيث ان $\gamma = \delta - \epsilon$ فاذا وضعنا اصل المحورين (ا س)

(ا-ص) في النقطة ا يتعين طول القوس $\gamma = \delta - \epsilon$ بالقانون

$$\gamma = \delta - \epsilon \quad \gamma = \delta - \epsilon + \delta - \epsilon$$

في النقطة ا يكون $\gamma = \delta - \epsilon$ فيساوي حينئذ طول نصف
السيكالويد ϵ ج

(تمرينات)

١. المطلوب نصف قمارا فخذ المكنى السلسلى (١)

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) 2 = 2$$

الجواب

$$\text{نق} = \frac{2}{2} = \text{طع}$$

(المكنى السلسلى هو الت كل الذى ياخذ خط متجانس اين غير قابل للتعدد
طرفاه ثابتان)

٢. المطلوب منتشر المكنى

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

ونصف قطر اثنائه

$$\text{الجواب} \quad \text{نق} = 3 \quad \left(\text{حصر} \right) \frac{1}{2} \text{ ف } \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \quad 2 = \frac{2}{3}$$

٣. المطلوب منتشر السيدريد (٢)

$$0 = \text{ص}^2 - (2 - 2) \text{ ص}^3$$

ونصف قطر اثنائه

الجواب

$$0 = 4093 \times 5^2 + 1102 \times 5 + 27 \times 4$$

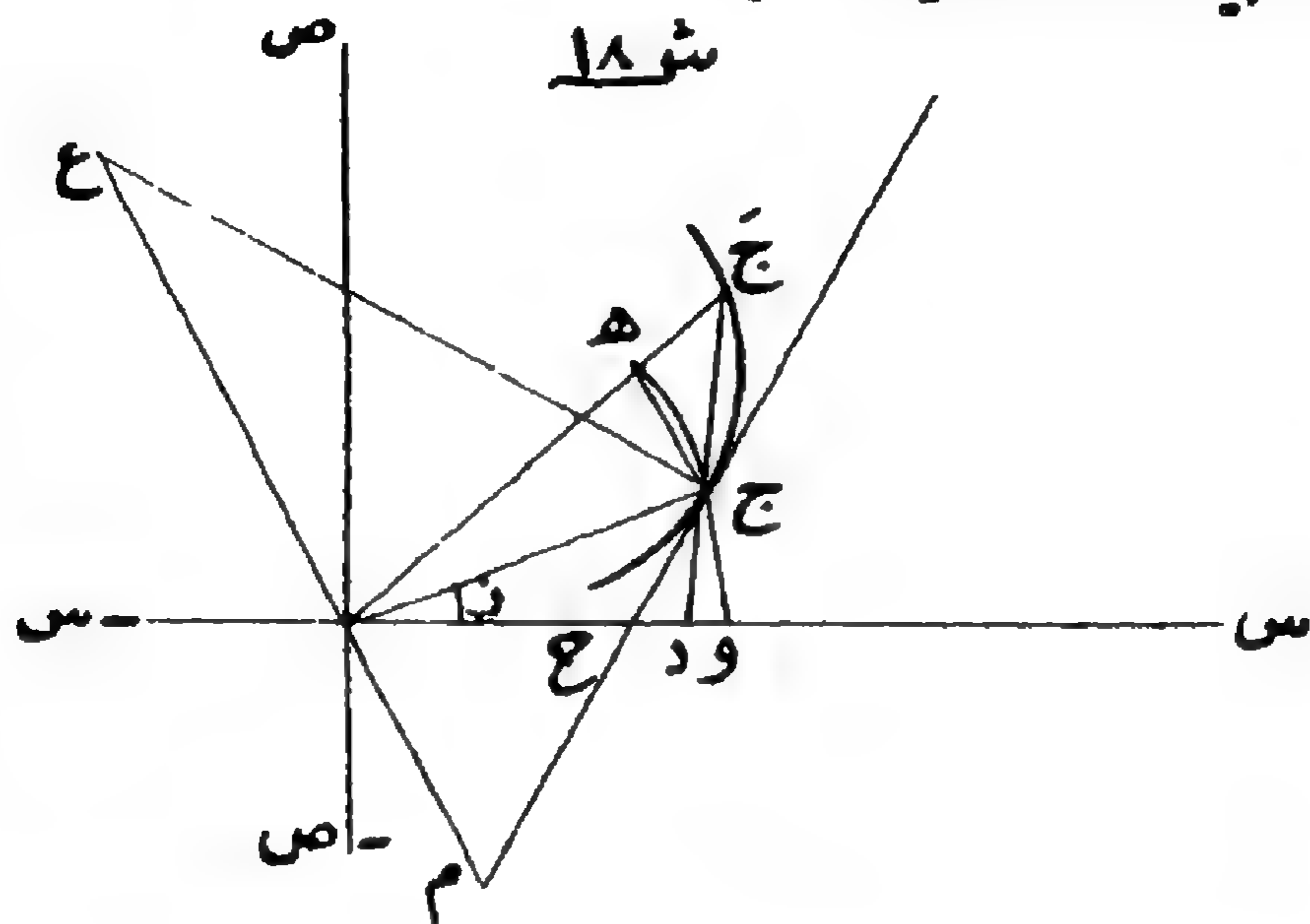
$$\text{نق} = \frac{2 \times (3 - 2) \times 3}{(2 - 2) \times 3}$$

- (١) اول من اشتغل بهذا المكنى هو جالدير نولى وقد تقدم تاريخه
(٢) مخترع السيدريد هو ديموكليس اليونانى وبتن انه كان فى القرن
السادس عشر من المياد

الباب الخامس عشر

في المنحنيات المرسومة بالنسبة للاحداثات القطبية

٩٨. إذا أخذنا ^{١٨}نقطة الأصل $أ$ قطبا و $اس$ شعورا قطبيا فوضع
النقطة $ج$ يتبين بمعرفة نصف القطر $أج = ر$ و الزاوية $س$
الحادثة بين نصف القطر المذكور والمحور

فنجد في المثلث $أج د$ القائم الزاوية

$$أد = أج \cdot جبا ج د$$

$$ج د = أج \cdot جا ج د$$

أعني

$$\left. \begin{array}{l} س = ر \cos \alpha \\ ص = ر \sin \alpha \end{array} \right\} (١)$$

فإذا أريد تحويل المعادلة $م(س، ص)$ = المنسوبة لمحورين مستقيمين
معامدين إلى معادلة منسوبة للاحداثات القطبية يكفي أن نضع فيها مقدار

$س = ر \cos \alpha$ و $ص = ر \sin \alpha$ فيجود

$$م(ر \cos \alpha، ر \sin \alpha) = ٠ \text{ أو } م(ر، \alpha) = ٠$$

واذا كانت م (س. د ص) = . تحتوي على $\frac{ص}{س}$ و $\frac{ص}{د}$ فقد ارهما
 يوجد بواسطة المعادلتين (١) ولذا افترض ان نر متغيرة مستقلة وان نقا
 متعلقة بها ان يحدث

$$\frac{ص}{نر} = \frac{ص}{نقا} - \frac{ص}{نر} - نقا حنا نر$$

$$\frac{ص}{نر} = \frac{ص}{نقا} + حنا نر + نقا حنا نر$$

ومن هنا

$$\frac{\frac{ص}{نقا} + حنا نر + نقا حنا نر}{\frac{ص}{نر}} = \frac{\frac{ص}{نقا}}{\frac{ص}{نر}} = \frac{ص}{نر}$$

$$\frac{\frac{ص}{نقا} - حنا نر - نقا حنا نر}{\frac{ص}{نر}} = \frac{ص}{نر}$$

ويأخذ التفاضل مرة ثانية يكون

$$\frac{ص}{نر} = \frac{ص}{نقا} - حنا نر - \frac{ص}{نقا} حنا نر - نقا حنا نر$$

$$\frac{ص}{نر} = \frac{ص}{نقا} + حنا نر + \frac{ص}{نقا} حنا نر - نقا حنا نر$$

٣٠

ويوضع هذه المتعادير في القانون (٥) من المطالب يحدث

$$\frac{نقا + \frac{ص}{نقا} حنا نر - نقا حنا نر}{\left(\frac{ص}{نقا} - حنا نر - نقا حنا نر \right)} = \frac{ص}{نر}$$

وهو المطلوب

(في المماس وتحت العمود)

٩٩. يمين المماس ج م (ش) للمنفى ج ج في النقطة ج معرفة الزاوية ج ح س الناتجة من تلاقيه بالمحور القطبي فاذا مرنا بها بالحرف ش يكون

$$\frac{\frac{\text{نق}}{\text{ح}} \text{ ح م} + \text{نق} \text{ ح م}}{\frac{\text{نق}}{\text{ح}} \text{ ح م} - \text{نق} \text{ ح م}} = \frac{\text{ح م}}{\text{ح م}} = \text{ط ش}$$

$$\frac{\text{ط م} + \text{نق} \text{ ح م}}{\text{نق} \text{ ح م} - \text{ط م}} = 1$$

واذا ريد معرفة الزاوية ج م = ضه المادتة بين المماس ونصف قطار نقطة المماس نجد

$$\frac{\text{ط م} - \text{ط م}}{\text{ط م} + \text{ط م}} = \frac{\text{ط م} - \text{ش م}}{\text{ط م} + \text{ش م}}$$

وبوضع مقدار ط م في المعادلة الاخيرة يحدث

$$\text{ط م} = \frac{\text{نق} \text{ ح م}}{\text{نق} \text{ ح م}}$$

وهو المطلوب

وبطريقة أخرى نأخذ نقطة ثانية ج على المنحنى المقروض معينة بالاحداثين نق + ف ثو ر م + ف م فاذا جعلنا اه = ج ه ينتج

$$\text{ج ه} = \text{ف ث} \quad \text{ج ا ج} = \text{نق} \text{ ف م}$$

وفي المثلث ج ه ج يحدث

$$\frac{\text{ح}(\text{ج ج ه})}{\text{ح}(\text{ج ج ه})} = \frac{\text{ج ه}}{\text{ج ه}} = \frac{\text{ج ه}}{\text{ج ه}} = \frac{\text{تق ف ز}}{\text{ف اق}}$$

فإذا فرضنا ان النقطة ج تقرب جدا من ج فتقرب الزاوية ج ه ج أى
 دج أ من الزاوية م ج أ = ضه والزاوية ج ه ج من الزاوية القائمة
 فنهاية الزاوية ج ج أ تكون حينئذ ٩٥° - ضه ومن جهة أخرى
 قد علم ان نهاية نسبة أ الوتر ج ه لافوس تق × ف ز يكون واحدا
 فإذا يصير

$$\text{طا ضه} = \frac{\text{تق}}{\frac{\text{ف ز}}{\text{ف اق}}}$$

وهو المطلوب

١٠٦ ايكن خط ع م عمودا على نصف القطر ا ج فالقصر ام المحصور
 بين القطب ا ونقطة تلاقي العمود المذ كور بالماس يسمى تحت المماس
 والخط ا ع المحصور بين ا ونقطة تلاقي العمود ح ع يسمى تحت
 العمود فإذا اعتبرنا المثلث ج ا م نجد ان

$$\begin{aligned} \text{ا م} &= \text{ا ج} \text{ طا ا ج م} \quad , \quad \text{ج م} = \sqrt{\text{ا ج} + \text{ا م}} \\ \text{اعني ان تم} &= \frac{\text{تق}}{\frac{\text{ف ز}}{\text{ف اق}}} \quad , \quad \text{ظ م} = \sqrt{\text{ا} + \frac{\text{تق}}{\frac{\text{ف ز}}{\text{ف اق}}}} \end{aligned}$$

وباعتبار المثلث ا ج ع يحدث

$$\text{ا ع} = \frac{\text{ا ج} \text{ طا ا ج ع}}{\text{ج ع}} = \sqrt{\text{ا ج} + \text{ا ع}}$$

$$\text{او} \quad \text{نع} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}} \quad , \quad \text{طع} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}} + \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

(في تفاضل قوس لمحن)

١٠١ لايجاد تفاضل اقوس و لمحن مفروض يكنى ان نضع في القانون
المعلوم

$$\text{نق} = \text{نق} + \text{نق}$$

مقداری نق و نق السابقين فيحدث

$$\text{نق} = \text{نق} + \text{نق}$$

ويمكن أيضا الاستعصال على هذا القانون باعتبار الملتح هـ ح لانه انجد فيه

$$\text{ج ح} = \text{ج ح} + \text{ج ح} - \text{ج ح} \cdot \text{ج ح} \text{ جتا ج ا ج}$$

$$\left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right) = 1 + \left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right) - \frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \text{ جتا ج ح}$$

فاذا لاحظنا ان

$$\text{ج ا ج ح} = 90^\circ \quad , \quad \text{وتر (ج ح)} = \frac{\text{قوس (ج ح)}}{\text{قوس (ج ح)}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

نؤول للمعادلة الأخيرة الى

$$\frac{\text{نق}}{\text{نق}} = 1 + \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

$$\text{نق} = \text{نق} + \text{نق}$$

ومنه

وهو المطلوب

(في مركز الانحناء ونصف قطره)

١٠٢ اذا وضعنا مقداری $\frac{\text{نق}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{نق}}{\text{نق}}$ السابقين بالمطلب في القانون^{٩٨}

$$= \frac{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega^2}{\omega} - \frac{\omega^2}{\omega} \right) + \frac{1}{\omega}}{\frac{1}{\omega} + \frac{\omega^2}{\omega}}$$

فإذا لاحظنا أن $\omega = \omega$ ووضعنا في القانون

$$\frac{\omega}{\omega} = \omega$$

بدلاً من ω المقدار السابق وبدلاً من ω ما عدا ω (المطلوب) يحدث

$$= \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right)}{\frac{1}{\omega} + \frac{\omega^2}{\omega}}$$

وهو المطلوب

(تطبيقات)

في المنحنيات ذات الدرجة الثانية

١٠٣ إذا أخذنا إحدى البورتين قطباً والمحور البوري محورا قطبياً فمادلة المنحنى تكون

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1 - \omega}{\omega}$$

بفرض أن (لا) هي الاختلاف المركزي فباخذنا ضلعا من اثنين يحدث

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega}$$

وبوضع $\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{نق}^1}$ عوضا عن $\frac{\text{لا جتنا}^1}{\text{ع}}$ نؤول المعادلة الأخيرة إلى

$$\frac{1}{\text{نق}^1} \frac{1}{\text{ع}^1} - \frac{1}{\text{نق}^2} \frac{2}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{نق}^1} \frac{1}{\text{ع}^1}$$

وبضرب الطرفين في نق^1 يحدث

$$\text{نق}^1 + 1 - 2 = \frac{1}{\text{ع}^1} \frac{1}{\text{ع}^2} - \frac{1}{\text{ع}^2} \frac{1}{\text{ع}^1}$$

فيكون حينئذ نصف قطار الانحناء

$$\text{نق}^1 = \frac{\left(\text{نق}^1 + \frac{1}{\text{ع}^1} \frac{\text{لا نق}^4}{\text{ع}^2} \right)}{\frac{1}{\text{ع}^2}} = \frac{\left(\text{نق}^1 + \frac{1}{\text{ع}^1} \right)}{\frac{1}{\text{ع}^2}}$$

ونجد أيضا

$$\text{طاضه} = (\text{طاسه} - \text{نر}) = \frac{\text{ع}}{\text{لانقا حانر}}$$

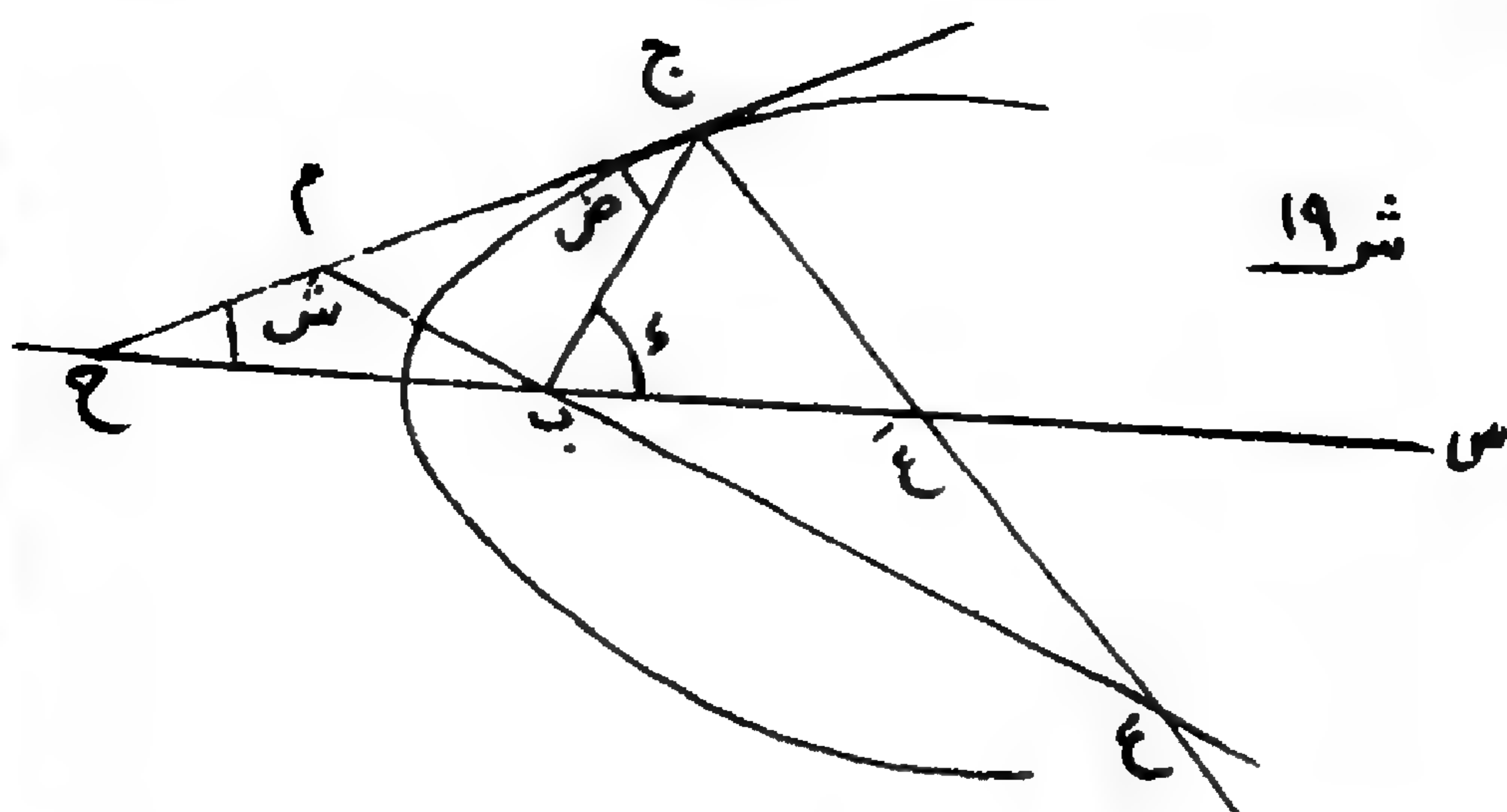
ومنها

$$\text{ظنا} (\text{سـ} - \text{نر}) = \frac{\text{لانقا حانر}}{\text{ع}}$$

فاذا يكون (نر)

$$\text{طباب ح ع} = \text{طباب ج م} = \text{طا} (\text{نر} - \text{سـ}) = \frac{\text{لانقا حانر}}{\text{ع}}$$

واذا



فإذا رسمنا بالحرف ي للزاوية ب ج ع يحدث

$$\frac{\text{ط ا ي}}{\text{ع}} = \frac{\text{لا نق ا ح ا ن ر}}{\text{ح ا ي}} = \frac{1}{\frac{\text{لا نق ا ح ا ن ر}}{\text{ع}} + 1}$$

فنصف قطر الانحناء يكون - حينئذ

$$\frac{\text{ع}}{\text{ح ا ي}} = \text{نق}$$

وبمقارنة هذا القانون بمساوينا في المطالب يحدث

$$\frac{\text{ط ع}}{\text{ح ا ي}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$$

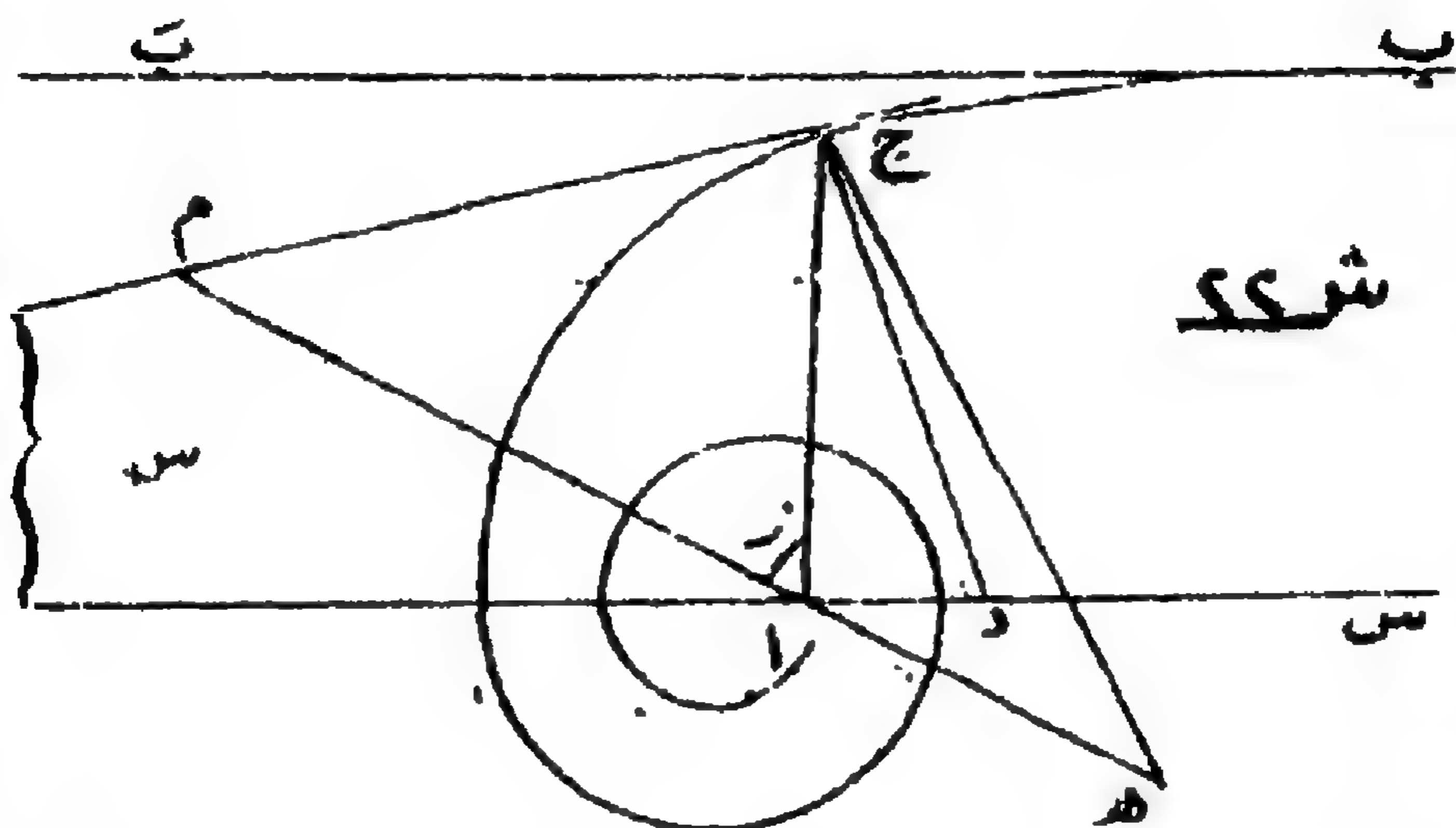
$$\text{ط ع ح ا ي} = \text{ع} \quad \text{ومنه} \quad \text{ع} = \text{ط ع ح ا ي}$$

اعني ان مسقط العمود ج ع على نصف القطر البوري كمية ثابتة تساوي
نصف العيار ع (١)

(١) تنسب هذه النظرية ايا جيز المتوفى بالتخمين في التورة الفرنسية
التي كانت سنة ١٨٤٨

(في الميزون الاول)

١٠٦ مع هذا المعنى كذا لان معادلاته القطبية هي $تق_١ = ح = ج$
 تشابه معادلة القطع الزائد المانوب لخطيه التقريبين وهو معنى بدور من جهة
 حول القطب (١) ويقرب جدا منه ولذا سميت النقطة ١ بنقطة التقرب ومن
 أخرى يقرب من خط تقرب وهو ب ب (ش ٢) مواز للمحور اسه وبعده
 منه يساوي نصف القطر $تق_١$ لان $ج د = تق_١$ حان $= \frac{ح}{حان}$
 وهي كمية اصغر من ١ لكن تقرب جدا منها كلما اقتصت $ح$



$$تق_١ = \frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{ج م} = \frac{ج د}{س د} = \frac{تق_١}{ح}$$

$$ومنها \quad ط ا ص = ط ا (س - ح) = تق_١ = \frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{س د} = \frac{تق_١}{ح}$$

$$تم = \frac{تق_١}{ح} = \frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{س د} = \frac{تق_١}{ح}$$

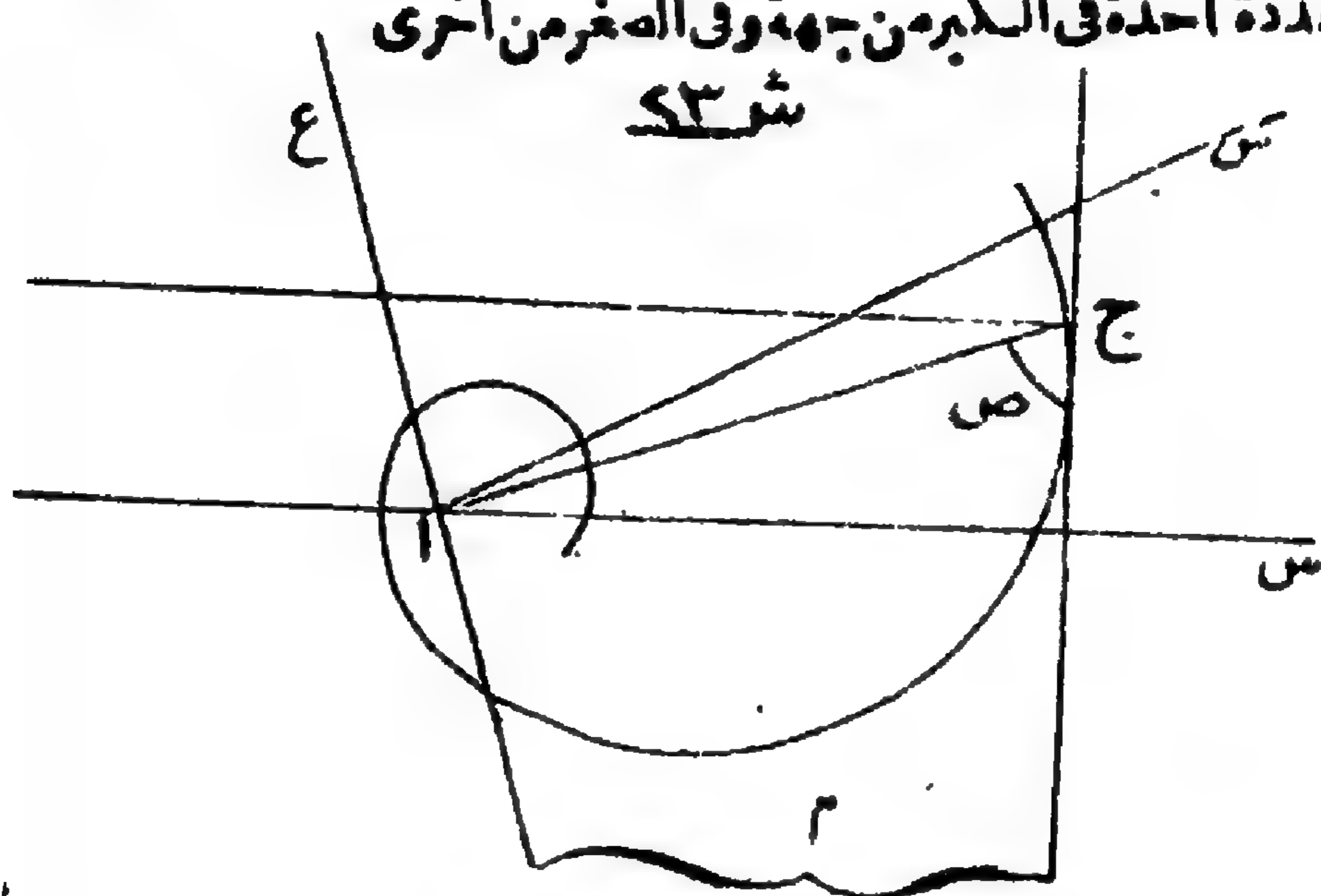
أعني ان تحت المماس كمية ثابتة ومن هذا نستخرج طريقة مهمة لرسم المماس
 في نقطة ما للمعنى

(في الميزون الاول)

١٠٧ معادلة هذا المصنف هي $نق = لقا \frac{نق}{م}$ وإذا فرضنا ان $ح$ اساس
اللوغار يتم يمكن كتابتها

$$نق = م = ح$$

فإذا جعلنا $نق = ٠$ يكون $نق = ح$ وحيث ان $ح$ عدد موجب
أكبر من الواحد فإذا زادت $نق$ بزيادات موجبات يأخذ $نق$ مقادير أكبر
من $ح$ وإذا زادت $نق$ بزيادات سالبات يأخذ $نق$ مقادير أصغر من $ح$
ويقرب جد من الصغر فالمصنف (ش ٢٣) يكون حينئذ متراكباً من حلزونات
متعددة آخذة في الكبر من جهة وفي الصغر من أخرى



لنأخذ تفاضل المعادلة $نق = م = ح$ مرتين فنجد

$$\frac{نق}{م} = م = ح = ٠ = نق = نق = لقا$$

$$\frac{نق}{م} = م = لقا = نق = لقا$$

فإذا يكون

$$لقا = نق = \frac{نق}{م} = \frac{١}{لقا}$$

اعني ان زاوية المماس ونصف القطر البوري في أي نقطة من المصنف كية ثابتة

(نجد أيضا ان $\frac{نق_1}{لع} = تم = نق_1 = لع$)

فيكون حينئذ

$$طع = \gamma = \frac{نق_1 + نق_1}{لع} = \frac{نق_1 + نق_1}{لع} = ١$$

وأيضا

$$نق = \frac{[نق_1 + نق_1 (لع)]}{نق_1 + نق_1 (لع) - نق_1 (لع)} = \frac{نق_1 + نق_1 (لع)}{نق_1 + نق_1 (لع) - نق_1 (لع)}$$

اعني ان نصف قطر الانحناء يساوي العمود فاذا جعلنا (ش ٢٣) $اع = نق_1$

$نق_1 = لع$ و $نق_1 = \frac{لع}{2} + نر$ يكون $نق_1$ و $نر$ احدتي النقطة ع وهي مركز انحناء الحزون المقابل للنقطة ج و ينتج من المعادلتين

$$\frac{لع}{2} - نر = نر = \frac{نق_1}{لع}$$

فاذا وضعنا هذين المقدارين في معادلة المنحنى يحدث

$$نق_1 = مر = لع = ٠ = مر = \frac{لع}{2} - نر + لغا (لع)$$

وهي معادلة المنتشر

واذا أخذنا أس محور افطية بقرض ان الزاوية المأدبة بينه وبين أس

نعادل $\frac{لع}{2} - لغا (لع)$ نمرضنا بالرض $نر$ للزاوية $مر$ اع يحدث

$$نر = \left[\frac{لع}{2} - لغا (لع) \right]$$

فتصير معادلة المنتشر

$$نق_1 = مر = نر$$

اعني ان منتشر الحزون اللوغاريتمي هو حزون لوغاريتمي آخر يساوي الاول

واذا فرضنا ان $مع = لع$ يكون $مع = ١$ و $لع (مع) = ٠$

ويستفاد من هذان محور الحزون ومحور منتشره معامدان

(تمرين)

لتكن $نق١ = ٢$ ج $(١ + حنا٢)$ معادلة الكاردويو يدق تجد

$$طاضه = - طنا \frac{\sqrt{}}{٢} ومنها ضه = \frac{٨ + \sqrt{}}{٢}$$

فهمذايسهل رسم المماس وتجد ايضا

$$تم = - نق طنا \frac{\sqrt{}}{٢} د نع = - ٢ ج حنا٢$$

$$طم = \frac{نق١}{حنا٢} د طع = \frac{نق١}{حنا٢}$$

الباب السادس عشر

(في التفاضلات الجزئية والكيفية للامتدادات بعدة متغيرات مستقلة)

١٠٨. لتكن $ط = م$ (سرد ص) متعلقة بتغيرتين مستقلتين $س$ و $و$ ص
 فاذا اخذنا مشتقتها بالنسبة الى $س$ باعتبار $و$ كمية ثابتة تسمى هذه
 المشتقة المشتقة الجزئية بالنسبة الى $س$ ويرمز لها بالرمز

$$\frac{ط}{س} \text{ او } \frac{م}{س} \text{ (سرد ص) او } \frac{م}{س} \text{ او } م \text{ (سرد ص)}$$

وبضربها في $س$ نجد التفاضل الجزئي وهو

$$\frac{ط}{س} \text{ او } \frac{م}{س} \text{ (سرد ص) او } \frac{م}{س} \text{ او } م \text{ (سرد ص)}$$

يرمز بمثل هذا للمشتقة الجزئية والتفاضل الجزئي بالنسبة الى $و$ (تنبيه) حيث ان $ط$ في $\frac{ط}{س}$ تدل على مشتقة $ط$ بالنسبة الى $س$ وفي $\frac{ط}{و}$ تدل على مشتقتها بالنسبة الى $و$ فقدرها يختلف في الكميتين

السابقة واذا لا ينبغي اختصار التفاضلين

$$\frac{\text{ط}}{\text{سر}} \div \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \text{ د } \frac{\text{ط}}{\text{سر}}$$

لاجل عدم الابهام

١٠٩ . اذا زدت المستقلتان سر و ص بالزيادتين ف سر و ف سر يكون

كاهو واضح

$$\text{ف ط} = \text{م} (\text{سر} + \text{ف سر} + \text{ص}) - \text{م} (\text{سر و ص})$$

و بموجب ما تقدم في المطلب^٩ يحدث

$$\text{ط} = \text{م} (\text{سر و ص}) + \text{ف سر} + \text{م} (\text{سر} + \text{ف سر و ص}) + \text{ف ص}$$

بقرض د و د كبتين تنعدمان مع ف سر و ف ص وحيث ان

$$\text{مها م} (\text{سر} + \text{ف سر و ص}) = \text{م} (\text{سر و ص})$$

يمكن ان يكتب

$$\text{م} (\text{سر} + \text{ف سر و ص}) = \text{م} (\text{سر و ص}) + \text{د}$$

بقرض ان د تنعدم مع ف سر . فاذا جعلنا د نه د = د تقول

المعادلة السابقة الى

$$\text{ف ط} = \text{م} (\text{سر و ص}) + \text{ف سر} + \text{م} (\text{سر و ص}) + \text{ف ص} + \text{ف سر} + \text{ف ص}$$

او

$$\text{ف ط} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \text{ف سر} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \text{ف ص} + \text{ف سر} + \text{ف ص}$$

فاذا اعتبرنا ف سر و ف ص كبتين صغيرتين جدا ورضنا نألهما بالرضين

سر و ص

يعني حاصل الجمع وهو

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

تفاضل المتعلقة ط الكلى ويرمز له بالرمز ط فيكون حينئذ

$$\text{ط} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

وعموما لو كانت ط = م (مرد مرد مرد) لوجدنا

$$\text{ط} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \dots$$

وينتج من هنا ان التفاضل الكلى لمتعلقة بجملة مستقلات يساوى حاصل جمع تفاضلاتها الجزئية بالنسبة لكل من المستقلات ليكن مثلا

$$\text{ط} = \text{مرد} + \text{مرد} + \text{مرد}$$

فنجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{مرد} + \text{مرد} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} + \text{مرد} = \text{مرد} + \text{مرد} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

ومنها

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{مرد} = \text{مرد} (\text{مرد} + \text{مرد}) = \text{مرد} (\text{مرد} + \text{مرد}) = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

وهي التفاضلات الجزئية فالتفاضل الكلى يكون حينئذ

$$\text{ط} = \text{مرد} (\text{مرد} + \text{مرد}) + \text{مرد} (\text{مرد} + \text{مرد}) + \text{مرد} (\text{مرد} + \text{مرد})$$

وهو المطلوب

(في التفاضلات الجزئية والكلمة للمتعلقات المضمرة)

١١٠. لتكن المعادلة م (مرد مرد ط) = ٠ المقروض فيها ان ط

متعلقة بالمستقلين مرد مرد وانحصل

$$\text{مرد} = \text{مرد} (\text{مرد مرد ط})$$

فبما هو على ما تقدم يكون

$$\text{مرد} = \text{مرد} = \frac{\text{مرد}}{\text{ط}} + \frac{\text{مرد}}{\text{ط}} + \frac{\text{مرد}}{\text{ط}}$$

وحيث ان = ٠ يكون = ٠ وتؤول المعادلة السابقة الى

$$0 = \frac{ط}{ص} + \frac{ص}{س} + \frac{س}{ط}$$

ومنها

$$\frac{ط}{ص} - \frac{ط}{س} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{س}$$

وهو تناضل ط الكلى
وبواسطة هذه المعادلة بالمعادلة

$$\frac{ط}{ص} + \frac{ط}{س} = ط$$

فتجدان

$$\frac{\frac{ط}{ص}}{\frac{ط}{س}} = \frac{ط}{ص}, \quad \frac{\frac{ط}{س}}{\frac{ط}{ص}} = \frac{ط}{س}$$

اعني ان شتق ط الجزئين بتعين بواسطة المعادلتين

$$0 = \frac{ط}{ص} + \frac{ص}{س} + \frac{س}{ط} \quad , \quad 0 = \frac{ط}{س} + \frac{ص}{ط} + \frac{س}{ص}$$

الناجمتين من اخذته اضل المعادلة المفروضة م (س و ص و ط) = 0 . بالنسبة
لكل من المستقلتين س و ص يمكن مثلاً

$$1 = \frac{ط}{ص} + \frac{ص}{س} + \frac{س}{ط}$$

فتجد

$$0 = \frac{ط}{ص} + \frac{ص}{س} + \frac{س}{ط}$$

ومنها

ومنها

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

هو التفاضل الكلي واما المشتقتان الجزئيتان فهما

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

وهو المطلوب

(في التفاضلات الجزئية ذات المراتب المختلفة للمتغيرات بجملة مستقلة)

١١١ يمكن $\tau = m$ (س و ص) متعلقة بالمستقلين س و ص فإذالاحظنا ان مشتقتي الجزئيتين $\frac{\partial}{\partial \tau}$ و $\frac{\partial}{\partial \tau}$ متعلقتان أيضا بالمتغيرتين

س و ص يمكن أخذ مشتقاتهما بالنسبة لكل من هاتين المشتقتين فنجد

المشتقات الجزئية ذات المرتبة الثانية وهي

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}$$

الإشارة $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ تدل على الناتج من أخذ مشتقة τ بالنسبة إلى س ثممشتقة هذه المشتقة بالنسبة إلى ص ولأجل الاختصار يكتب $\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}$ وكذا يكتب $\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}$ عوضا عن $\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}$ مشتقات τ ذات المرتبة

الثانية تكون حيث

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}, \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau}$$

والفرض الآن ص تزيد بالزيادة ف ص فتأخذ المتعلقة ط الزيادة
ط ويحدث

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{م (سرد ص + ف ص)} - \text{م (سرد ص)}}{\text{ف ص}}$$

وإذا زادت س بالمقدار ف س نجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{م (سرد ص + ف ص + س)} - \text{م (سرد ص + ف ص)}}{\text{ف س}}$$

ف س

وتكون

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ف س}}{\text{ف س}}$$

وبالمشاهدة نجد أن

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ف س}}{\text{ف س}}$$

ومنه

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

هو ما اردنا بيانه

لتكن مثلا المتعلقة ط = $\sqrt{\text{س}^2 - \text{ص}^2}$ فنجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{ص}^2}}, \quad \frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{ص}^2}}, \quad \frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

(في التفاضلات الكمية ذات المراتب المختلفة للمتعلقات بجملة مستقلة)

١١٣ قد وجدنا فيما سبق ان

$$\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{س}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

فاذا اعتبرنا $\frac{\text{ط}}{\text{و}}$ و $\frac{\text{ط}}{\text{ص}}$ كميتين ثابتتين وأخذنا تفاضل $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ الكلي يحدث

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{و}} = \frac{\text{ط}}{\text{و}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{و}} + \frac{\text{ط}}{\text{و}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط}}{\text{و}} \cdot \left(\frac{\text{ط}}{\text{و}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \right) + \frac{\text{ط}}{\text{و}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

وبالاحظة ان

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{و} \cdot \text{ص}}$$

$$\text{نجد} \quad \frac{\text{ط}^2}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{و} \cdot \text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{و} \cdot \text{ص}^2}$$

وهو تفاضل $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ الكلي ذو المرتبة الثانية

وبأخذ تفاضل هذه المعادلة نجد

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^3}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}^2} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}^3}$$

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^3}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}^2} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}^3}$$

وهو التفاضل ذو المرتبة الثالثة

وبالشاهد يرى ان

$$\frac{\text{ط}}{\text{و}} = \frac{\text{ط}}{\text{و}} + \frac{\text{ط}}{\text{و} \cdot \text{ص}}$$

بشرط ان يجعل في نشر الطرف الثاني اسس $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ علامات تفاضلية

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{و} \cdot \text{ص}}$$

وان

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{و}} = \frac{\text{ط}^3}{\text{و}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}} + \frac{\text{ط}^3}{\text{و} \cdot \text{ص}^2}$$

وعموما

وهذه القاعدة تجري على متعلقة بتغيرات ايما كان عددها

(في المشتقات ذات المراتب المختلفة المتعلقة مضمرة)

بمستقلة واحدة

١١٤ لتكن المعادلة م (س ر ص) = ٠ المفروض فيها ان ص متعلقة بالمستقلة س فاذا اريد ايجاد مشتقاتها بالتناسبة بواسطة المشتقات الجزئية للمتعلقة م (س ر ص) فخذ تفاضل هذه المعادلة هي اولى فيحدث

$$٠ = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{م}{ص}$$

ومنها

$$\frac{\frac{م}{ص}}{\frac{م}{ص}} = \frac{ص}{ص}$$

وهي المشتقة الاولى

وباخذ التفاضل مرة ثانية وملاحظة ان $\frac{م}{ص} = \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص}$ يحدث

$$٠ = \frac{م}{ص} + ٢ \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص}$$

واذا وضعنا فيه مقدار $\frac{م}{ص}$ السابق ينتج

$$\frac{\frac{م}{ص} + ٢ \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{ص}{ص}}{\frac{م}{ص}} = \frac{م}{ص}$$

وباخذ التفاضل مرة ثالثة فنجد $\frac{م}{ص}$ وهم براء

الباب السابع عشر

(في اعميم قانون تيلور)

١١٥ لتكن م (س ر ص) متعلقة بالتغيرتين المستقلتين س ر ص فاذا زادتا المقدارين س ر صه تصير المتعلقة المفروضة م (س + س ر ص + صه) وايكن المطلوب نشرها على حسب قوى الزياتين س ر صه ولهذا نبذل فيها س ر صه بالـ $\frac{م}{ص}$ كـ $\frac{م}{ص}$ فتصير م (س + س ر ص + صه) = م (س + صه) ثم نشر هذه المتعلقة على حسب قوى س بواسطة قانون ما كلوران فنجد

$$m(s) = (0)m + s + (0)m + \frac{s}{1} + (0)m + \dots + \frac{s}{(1-s)!}$$

$$(1) \quad (0)m + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{s^n}{n!} + \dots$$

واذا جعلنا لاجل الاختصار

$$p = s + s^2 + s^3 + \dots + s^n + \dots$$

يكون

$$m(s) = m(p + s)$$

وبأخذ التفاضل يحدث

$$m'(s) = p \cdot m'(p + s) + m(p + s)$$

وبسبب ان

$$p = s + s^2 + s^3 + \dots + s^n + \dots$$

تؤول المعادلة الأخيرة الى

$$m'(s) = p \cdot m'(p + s) + m(p + s)$$

وحيث ان تفاضل p و s ذوى المرتبة الثانية من عند ما يحدث

$$m'(s) = p \cdot m'(p + s) + m(p + s)$$

$$+ \frac{s^2}{2!} + \dots$$

ومنه

$$m'(s) = p \cdot m'(p + s) + m(p + s)$$

وبأخذ التفاضل مرة ثالثة يحدث

$$+ \frac{r^2}{s^2} \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2} = (s)''$$

$$+ \frac{r^2}{s^2} \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2} = (s)''$$

وعادوا

$$+ \frac{(1-s)}{12} + \frac{1-s}{12} \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2} = (s)''$$

$$+ \frac{r^2}{s^2} + \dots + \frac{r^2}{s^2} = (s)''$$

واذا جعلنا $s = 0$. فتبدل طرعا بالكميتين s و r ونؤول المعادلات السابقة الى

$$r(0) = m(s, r)$$

$$r(0) = \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2}$$

$$r(0) = \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2} + \frac{r^2}{s^2}$$

$$r(0) = \frac{1-s}{12} \frac{r^2}{s^2} + \frac{1-s}{12} \frac{r^2}{s^2}$$

$$+ \frac{1-s}{12} \frac{r^2}{s^2} + \dots +$$

فاذا وضعنا هذه المقادير في القانون (١) وجعلنا $s = 1$ يكون

$$m(s + s^2 + s^3 + \dots) = m(s + s^2 + s^3 + \dots) + \frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots$$

$$\frac{1}{1-s} \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right) + \frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{(1-s)^2} \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right) + \frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots$$

$$(n) \left\{ \frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots + \frac{m^2}{s^n} \right\}$$

$$+ \dots + \frac{1}{(1-s)^2} \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots + \frac{m^2}{s^n} \right) + \frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots$$

$$\left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots + \frac{m^2}{s^n} \right)$$

وهو قانون تبلور في الحالة المذكورة لكن يشترط ان تبدل في الحد الاخير وهو باقي المتسلسلة $\frac{m^2}{s^n}$ بالكمية $s + s^2 + s^3 + \dots$ بالكمية $s + s^2 + s^3 + \dots$

وبناء على ما قلناه في المطالب يمكن وضعه على الصورة الآتية

$$m(s + s^2 + s^3 + \dots) = m(s + s^2 + s^3 + \dots) + \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{(1-s)^2} \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right) + \frac{1}{(1-s)^2} \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots \right)$$

$$+ \left(\frac{m^2}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \dots + \frac{m^2}{s^n} \right)$$

وهذه القاعدة تجري على متعاقبه بتغيرات ياما كان عددها
ولاجل استعمال القانون (ت) ينبغي ان مشتقات م (س و ص) الجزئية اغاية
التي رتبها ١ - ٢ تكون محسوبة ودقوان التي رتبها ٢ تكون خلاف
ذلك مستقرة بين النهايات س و س + س و ص و ص + ص
(تعميم قانون ما كار ران)

١١٦ اذا جعلنا في القانون (ت) س = ٠ و ص = ٠ ووضعنا س و ص

عوضا عن س وضعنا ثم رمزنا بالرموز $\frac{٢٦}{٦٦}$ و $\frac{٢٦}{٦٦}$ و $\frac{٢٦}{٦٦}$

لما اتوول اليه المشتقات الجزئية $\frac{٢٦}{٦٦}$ و $\frac{٢٦}{٦٦}$ و $\frac{٢٦}{٦٦}$

حينئذ يجعل قيم س = ٠ و ص = ٠ فيحدث

$$م (س و ص) = م (٠ و ٠) + \frac{٢٦}{٦٦} س + \frac{٢٦}{٦٦} ص + \frac{١}{١٢}$$

$$\left(\frac{٢٦}{٦٦} س + \frac{٢٦}{٦٦} ص + \frac{٢٦}{٦٦} س + \frac{٢٦}{٦٦} ص + \dots \right)$$

$$+ \frac{١}{(١+٢)!} \left(\frac{٢٦}{٦٦} (١+٢) + \frac{٢٦}{٦٦} \right) \times$$

$$\left(\frac{٢٦}{٦٦} + \dots + \frac{٢٦}{٦٦} \right)$$

$$+ \frac{١}{٢!} \left(\frac{٢٦}{٦٦} + \frac{٢٦}{٦٦} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{٢٦}{٦٦} \right) (٢ و ٢ و ص)$$

فينبغي تبديل ط و ع بالكسبتين ق و د و ص

(في النهايات الكبرى والصغرى للامثلة علاقات بجملة متغيرات مستقلة)

١١٧ لتكن m (سرد ص) متعلقة بالمستقلين s و v فيقال انها في نهايتها الكبرى اذا كانت أكبر من m ($s \pm s$ و $v \pm v$) بفرض s و v زيادتين صغيرتين بقدر ما يراد فالعلامة المميزة للنهاية الكبرى هي حيثئذ ان الفرقين

$$m (s + s \text{ و } v + v) - m (s \text{ و } v) \text{ و } m (s - s \text{ و } v - v) - m (s \text{ و } v)$$

يكونان سالبين

ويقال انها في نهايتها الصغرى اذا كانت أصغر من m ($s \pm s$ و $v \pm v$) فالفرقان المذكوران يكونان موجبيين

لتفرض ان المشتقات الثانية ليست لانها ثابتة فتجد بواسطة قانون تيلور (ت)

$$m (s + s \text{ و } v + v) - m (s \text{ و } v) = \frac{m}{6} s^2 + \frac{m}{6} v^2 + \dots$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{m}{6} s^2 + \frac{m}{6} v^2 + \dots \right) + b$$

واذا أخذنا s و v صغيرين صغرا كافيا تكون علامة الطرف الثاني عين علامة حاصل الجمع

$$\frac{m}{6} s^2 + \frac{m}{6} v^2$$

لكن علامة هذه الكمية تتغير بتغير علامتي s و v فينبغي حيثئذ ان يكون

$$\frac{m}{6} s^2 + \frac{m}{6} v^2 = 0$$

وحيث ان s و v زيادتان اختياريتان غير متعلقة احدهما بالآخرى نؤول المعادلة لسابقة الى

$$(1) \quad \frac{m}{6} s^2 = - \frac{m}{6} v^2$$

فبواسطة هاتين المعادلتين يمكن تعيين سر د ص

١١٨ الشرطان (١) اللذان يتحددان في النهايات الكبرى والصغرى يدلان على ان التقاضيل الكلي للمتعلقة المفروضة يكون معدوماً ما كانت سر د ص واذا تحقق ما يحدث

$$م (س + سه + ص + صه) - م (سر د ص) = \frac{1}{2} \left(\frac{م^2}{صه} \right)$$

$$سه + 2 + \frac{م^2}{صه} سه + \frac{م^2}{صه} صه + \left(\frac{م^2}{صه} \right) + ب$$

ويجب ان مقادير سر د ص الناتجة من (١) اذا وضعت في هذه المعادلة يحفظ طرفها الثاني علامته (ياخذ سه د صه صغيرين جدا) واذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية لاتتعدى هذه المقادير تكون علامة الطرف المذكور عين علامة الكمية

$$\frac{م^2}{صه} سه + 2 + \frac{م^2}{صه} سه + \frac{م^2}{صه} صه + \left(\frac{م^2}{صه} \right) + ب$$

فيلزم حينئذ ان هذه الكمية أو هذه الاخرى الناتجة من قسمة الاولى على سه

$$\frac{م^2}{صه} سه + 2 + \left(\frac{سه}{صه} \right) \frac{م^2}{صه} + \frac{م^2}{صه} سه + \frac{م^2}{صه} صه$$

تكون دائماً موجبة ارسالية مهما كانت النسبة سه صه ولذا ينطبق كما هو موضح في مبادئ الجبر ان يكون

$$\frac{م^2}{صه} سه + 2 + \left(\frac{سه}{صه} \right) \frac{م^2}{صه} + \frac{م^2}{صه} سه + \frac{م^2}{صه} صه > 0$$

ويتحقق هذا الشرط اذا اتحدت علامتا $\frac{م^2}{صه} سه$ و $\frac{م^2}{صه} سه$ فتكون حينئذ المتعلقة المفروضة في نهايتها الكبرى اذا كانت هاتان المشتقتان سالتين وفي نهايتها الصغرى اذا كانتا موجبتين

فاذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية تنعدم بمقادير سر د ص الناتجة من (١) فلا يكون للمتعلقة نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا انعدمت أيضاً

المشتقات ذات المرتبة الثالثة وكان حاصل جمع المشتقات ذات المرتبة الرابعة لا تتغير علامته

ولو كان عندنا متعلقة بأكثر من متغيرتين لاجرىنا العمل كما سبق
لتكن مثلاً المتعلقة

$$م (س ر ص) = (س - ١) + (ص - ب) + (س - ص) \quad \text{فجد}$$

$$٦م = ٢(س - ص - ١) + ٦(ص - ب) + ٢(س - ص - ١) \quad \text{ومن المعادلتين}$$

$$٢س - ص - ١ = ٠ \quad ٢ص - س - ب = ٠$$

$$\text{يستخرج} \quad س = \frac{١ + ب}{٣} \quad ر = \frac{٢ + ب}{٣}$$

وبأخذ التفاضل الكلى ذى المرتبة الثانية يحدث

$$٦م = ٤س - ٤ص + ٤$$

فيشاهد بسهولة أن $\frac{٦م}{٤س}$ و $\frac{٦م}{٤ص}$ متعددا العلامة وانهما موجبان وان

$$\frac{٦م}{٤س} \frac{٦م}{٤ص} = \left(\frac{٦م}{٤س} \right) (٢ - ٢) = ٠ < ٠$$

فاذا تكون المتعلقة المقروضة في نهايتها الصغرى بمقدارى س و ص السابقتين

وتساوى النهاية المذكورة $\frac{٢(١-٢)}{٣}$

تجربيات

$$١. م (س ر ص) = ٣س (١ - س - ص) \quad \text{فجد} \quad س = ٢ \quad ر = ٣ \quad \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$م = \frac{١}{٢٣٣} \quad \text{وهي نهاية كبرى}$$

$$٢. م (س ر ص) = ٣س^٢ + ٣ص^٢ - ٢س - ٢ص - ٢ \quad \text{فجد}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{٢}{٣} \right) = س \\ \left(\frac{٢}{٣} \right) = ص \\ \left(\frac{٢}{٣} \right) - = س \\ \left(\frac{٢}{٣} \right) = ص \end{array} \right\} \text{الجواب}$$

٣. المطلوب أقصر بعد خطين مستقيمين أياما كان وضعهما في الفراغ

لتكن $س = ج ط + د ر ص = ه ط + ز و س = ج$
 $ط + د ر ص = ه ط + ز و س$ معادلات المستقيمين المقروطين
 فبعدهما يكون

$$ب = \frac{(س - د) (ه - ز) - (ه - ه) (ز - ز) (ج - ج)}{(ج - ج) + (ه - ه) + (ج - ج)}$$

وهو المطلوب

١١٩ لتكن م (س د ر ط و ... ع) متعلقة بتغيرات عددها ج
 + ك مرتبط بعضها ببعض بمعادلات مثل

$$(١) \begin{cases} م (س د ر ط و ... ع) = ٠ \\ م (س د ر ط و ... ع) = ٠ \\ \dots \\ م (س د ر ط و ... ع) = ٠ \end{cases}$$

عددها ج فيوجب ما تقدم ينبغي ان يكون

$$(٢) \quad ٠ = \frac{م}{س} + \frac{م}{د} + \frac{م}{ر} + \frac{م}{ط} + \frac{م}{و} + \dots + \frac{م}{ع}$$

لتأخذ تفاضل المعادلات (١) فتجد

$$(٣) \begin{cases} ٠ = \frac{م}{س} + \frac{م}{د} + \frac{م}{ر} + \frac{م}{ط} + \frac{م}{و} + \dots + \frac{م}{ع} \\ ٠ = \frac{م}{س} + \frac{م}{د} + \frac{م}{ر} + \frac{م}{ط} + \frac{م}{و} + \dots + \frac{م}{ع} \\ \dots \\ ٠ = \frac{م}{س} + \frac{م}{د} + \frac{م}{ر} + \frac{م}{ط} + \frac{م}{و} + \dots + \frac{م}{ع} \end{cases}$$

فاذا محو فان المعادلة (٢) ج متغيرات بواسطة المعادلات (٣) يبقى فيها

٥ متغيرات اختيارية في مساواة مكرراتها بالصغر يحدث ٥ معادلات بواسطة بواسطة المعادلات (١) يمكن تعيين كل المتغيرات الموضوعة التي بها الصغر المتعلقة في النهاية الكبرى أو الصغرى
عوضاً عن حل المعادلات (٣) بالنسبة إلى التفاضلات التي يراد محوها من
(٢) يمكن إجراء العمل بطريقة أخرى وهي أن تضرب كلا من المعادلات (٣) في كمية غير معينة ونضعها إلى المعادلة (٢) فنجد

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots \right) \\ + \left(\frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots \right) \\ + \left(\frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots \right) \\ \hline + \left(\frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots \right) \end{array} \right.$$

ويلزم تعيين ك ر ل ... حيث تنزل من هذه المعادلة تفاضلات الكميات التي يراد محوها وحيث ينبغي بعد ذلك مساواة مكررات التفاضلات الباقية بالصغر يؤول الأمر إلى مساواة مكررات كل التفاضلات الموجودة في المعادلة السابقة به أي بالصغر فنجد المعادلات

$$\begin{array}{l} \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots = \dots \\ \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots = \dots \\ \hline \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ل}{م} + \frac{ز}{م} + \dots = \dots \end{array}$$

التي عددها ٥ في بواسطة بواسطة المعادلات (١) تتعين الكميات ك ر ل ... التي عددها ٥ والجمايل م ز ح د ط و ...

د ع التي عددها ج + د .

ايكن مثلاً م (س د ص ر ط) = س ص ر ط بفرض ان س + ص
+ ط = ا فنجد

$$\text{ص ر ط} + \text{س} + \text{س ر ط} + \text{ص} + \text{س ر ط} + \text{ط} = .$$

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ط} = .$$

ويضرب المعادلة الاخيرة في ل وضمها الى الاولى يحدث

$$(\text{ل} + \text{ص ر ط}) + \text{س} + (\text{ل} + \text{س ر ط}) + \text{ص} + (\text{ل} + \text{س ص ر}) + \text{ط} = .$$

ومن هنا

$$\text{ل} + \text{ص} + \text{ط} = .$$

$$\text{ل} + \text{س} + \text{ط} = .$$

$$\text{ل} + \text{س} + \text{ص} = .$$

فن هذه المعادلات والمعادلة س + ص + ط = ا يستخرج

$$\text{س} = \text{ص} = \text{ط} = \frac{1}{3}$$

وهو المطلوب

تمرين

(مسئلة) المطلوب ايجاد السطح المستوي الذي يمر بنقطة معلومة الوضع
في الفراغ ويصنع مع المستويات الاحداثيات أصغر هرم

ايكن س ر ص ر ط احداثيات النقطة المفروضة فمعادلة كل مستوي
ماريهاتكون

$$(\text{س} - \text{س}^*) + (\text{ر} - \text{ر}^*) + (\text{ص} - \text{ص}^*) + (\text{ط} - \text{ط}^*) = .$$

وحجم الهرم يكون

$$H = \frac{(\text{س}^* + \text{ر}^* + \text{ص}^* + \text{ط}^*)}{4}$$

فموجب ما تقدم فجدان

$$\frac{\text{س}^*}{\text{ص}^*} = \frac{\text{ر}^*}{\text{ب}^*} = \frac{\text{س}^*}{\text{ط}^*} = \frac{1}{4}$$

الباب الثامن عشر
(في النقطة المتماززة)

نقط منحن المتماززة هي التي تماز عن سواها ببعض خواص خصوصية وتندسم
الى ستة أقسام وهي

١ • نقط التغير

١٢٠ نقطة التغير هي النقطة التي فيها يصير المنحنى مجزأ بعد ان كان محمداً
وبعبارة أخرى هي النقطة التي فيها يقطع المماس المنحنى في شرط وجودها
حينئذ ان تتغير علامة المشتقة الثانية m'' (س) ولا يتحقق هذا الا بمرورها
بالصفر أو بالانهاية فإذا ∞ كفي لتعيين النقط المذكورة ان نحصل المعادلة

$$m'' = 0 \text{ أو المعادلة } m'' = \infty$$

ليكن مثلاً

$$v = b + 2(s - j)^3$$

فبأخذ النفاضل يحدث

$$\frac{v}{s} = 6(s - j)^2 \text{ و } \frac{v}{s^2} = \frac{6}{s}(s - j) \text{ و } \frac{v}{s^3} = 12 = \frac{6}{s^2}$$

$$\text{وبجعل } 0 = \frac{6}{s^2} = 12(s - j) \text{ و } 0 = (s - j)$$

يحدث $s = j$ وهو من نقطة التغير ومرتبها يكون حينئذ $v = b$

وتأكيد الوجودها نضع $s + s - s = 0$ بدلا عن s في $\frac{v}{s^3}$ فنجد

$$\frac{v}{s^3} = \frac{6}{s^2} = 12 \text{ و } \frac{v}{s^3} = 12 = 12 - 12$$

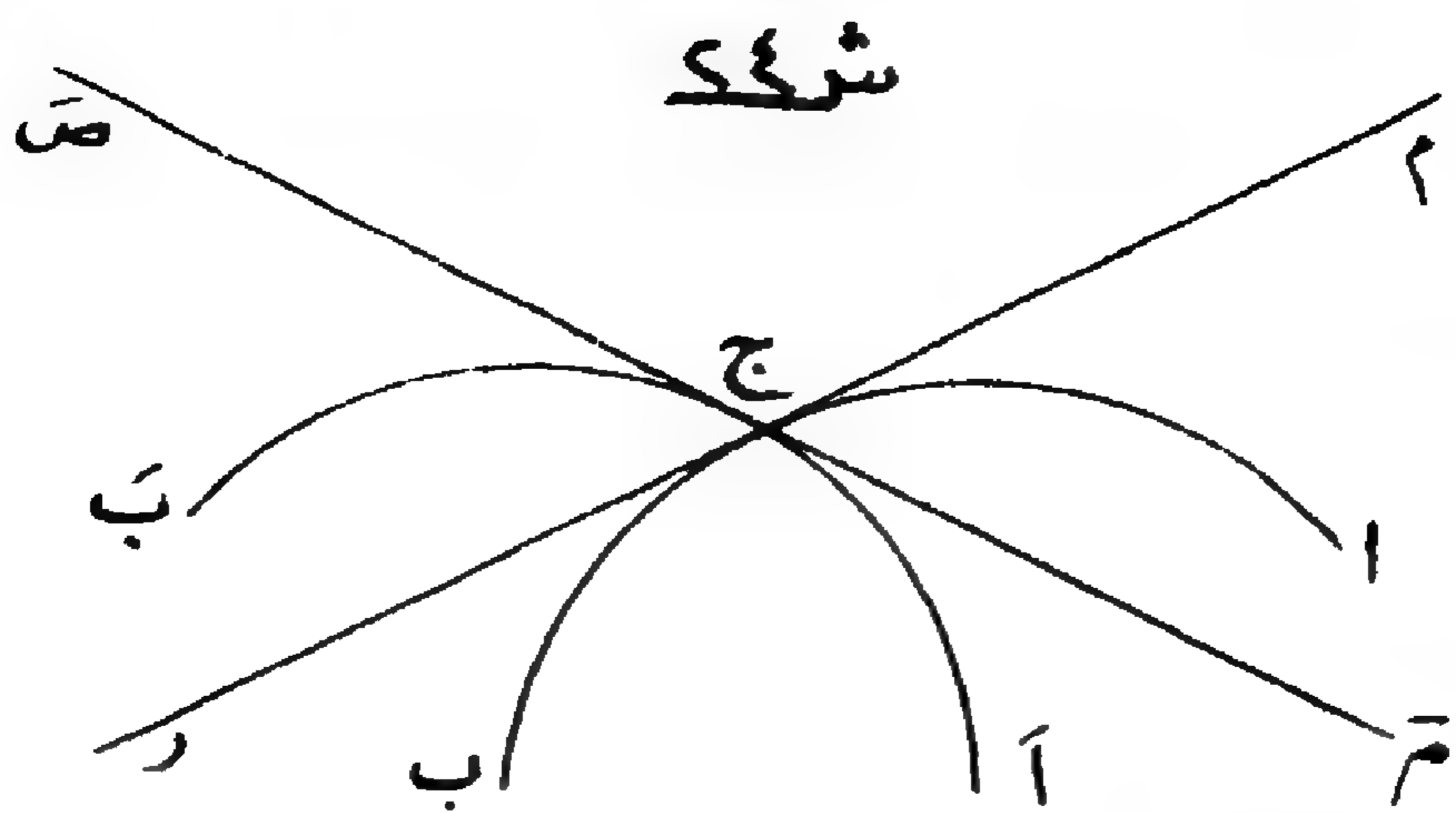
و ينتج من اختلاف علامتي هاتين الكميتين ان النقطة المتغيرة هي نقطة تغير

٢ • نقط التكرار

١٢١ نقطة التكرار هي النقطة التي يمر بها عدة فروع للمنحنى وله فيها جهة

عامة مختلفة (ش ٢٤) وتسمى ثنائية اذا مر بها فرعان وثلاثية اذا مر بها

ثلاثة فروع وهلم جرا



لتكن مثلا المعادلة

$$ص = ح \pm س (س - س) \sqrt{س}$$

فاذا أخذت س مقدارا كبيرا قليلا ثم مقدار آخر أصغر منها تأخذ
ص مقدارين حقيقيين يؤولان الى واحد اذا صارت $س = س$ وعليه
فلا معنى لفرعان يمران بالنقطة $س = س$ $ر = ص = ح$ وبأخذ مشتقة
المعادلة نجد

$$\frac{ص}{س} = ح \pm (س - س) \sqrt{س}$$

وبجعل $س = س$ يحدث

$$\frac{ص}{س} = ح \pm س \sqrt{س}$$

أعني ان للمنتحى المفروض مماسين مختلفين في النقطة $(س, ح)$ فهي حينئذ
نقطة تكررت ثانياً وعلى العموم لتكن المعادلة الجبرية $م(س, ر) = ٠$
فيحدث منها

$$\frac{\frac{ص}{س}}{\frac{م}{س}} = \frac{ص}{م}$$

وحيث ان في كل نقطة تكررت المشتقة مقدارين بالاقل وانا لا نجد هنا الا واحدا
فقط فيلزم حينئذ ان هذا المقدار يكون غير معين أعني انه يؤول الى الصورة ٠
فاذا يكون

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦٥} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٦٥}$$

فالنقطة المطلوبة هي التي احداً **فكل** منها يوافقان هاتين المعادلتين والمعادلة
م (سر د ص) = ٠ ولتعيين اتجاه المماسات نأخذ التقاطع المكي ذات المرتبة

$$\text{الثانية فنجد بالاحطة ان } \cdot = \frac{٢٦}{٦٥}$$

فاذا كانت النقطة ثنائية يلزم ان يكون جذر هذه المعادلة حقيقية ومختلفين
وأما ان كانت ثلاثية فينبغي ان يكون

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦٥} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٦٥} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٦٥}$$

ونجد المماسات بحل المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثالثة وهكذا
يمكن مثلاً المعادلة

$$\cdot = \text{ص}^٢ - ٢ \text{ سر ص} - \text{سر}^٣ + ٣ \text{ سر} - \text{سر} = ٠$$

فنجد

$$\cdot = ٢ (\text{ص} - \text{سر}) \frac{٢٦}{٦٥} - ٢ \text{ ص} - ٣ \text{ سر}^٢ + ٦ \text{ سر} - ١ = ٠$$

ومن المعادلتين

$$\text{ص} - \text{سر} = ٠ \text{ د } \cdot = ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ سر}^٢ - ٦ \text{ سر} - ١ = ٠$$

يسـ تخرج سر = ١ د ص = ١ وهما مقداران يناسبان للمعادلة

المفروضة ولتعيين $\frac{٢٦}{٦٥}$ نأخذ التقاطع الثاني فنجد

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦٥} - \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right)^٢$$

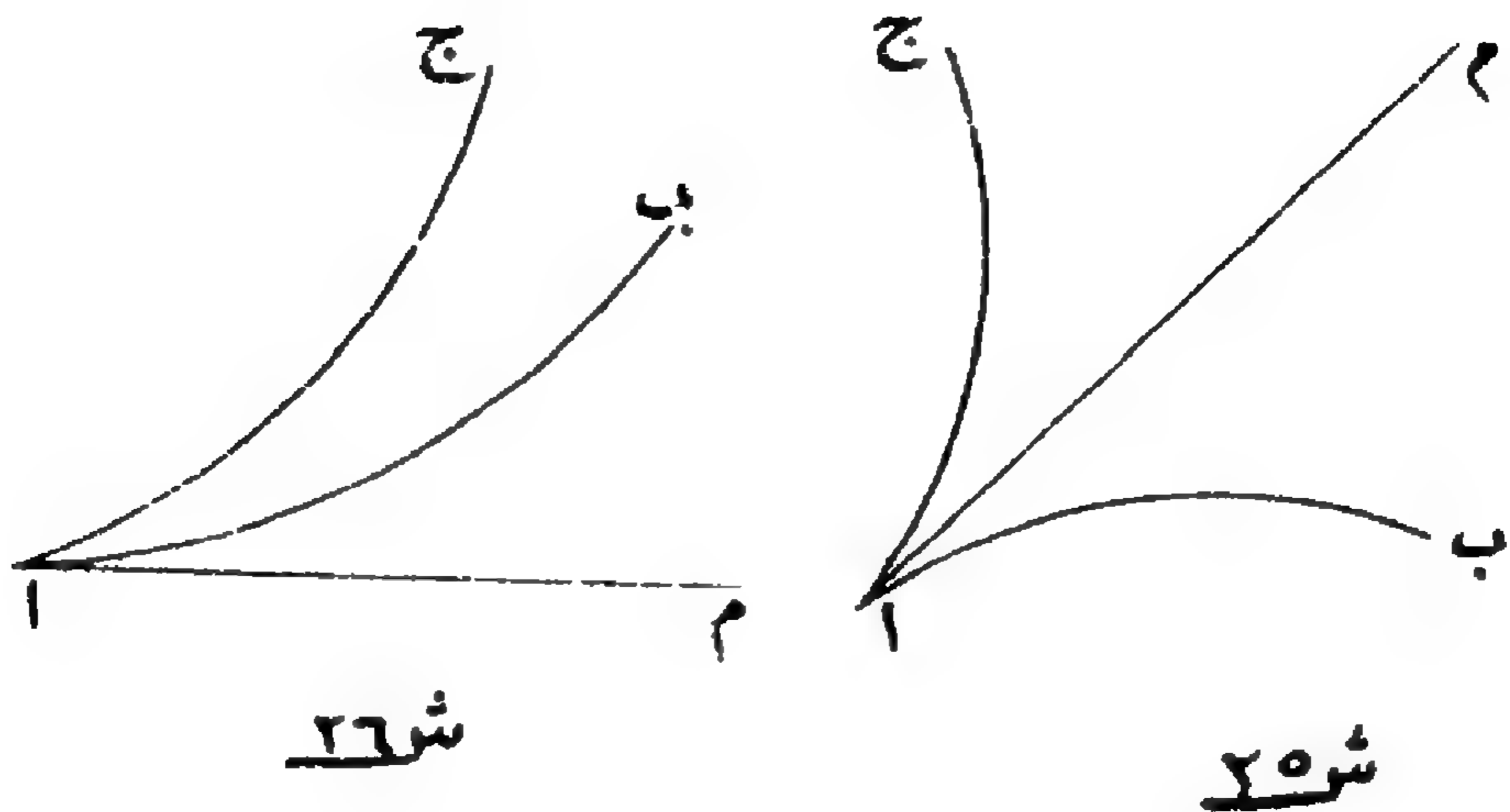
ومنها

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦٥} \text{ د } ٢ = \frac{٢٦}{٦٥}$$

فالنقطة سر = ١ د ص = ١ تكون حينئذ ثنائية

٣. نقطة الرجوع

١٢٢. نقطة الرجوع هي نقطة يقف بها فرعان المنحنى ولهما انحناء مشترك وتسمى ذات النوع الاول اذا كان المماس بينهما (ش ٢٥) وذات النوع الثاني اذا وجد الفرعان من احدى جهتي المماس (ش ٢٦)



لتكن مثلاً المعادلة

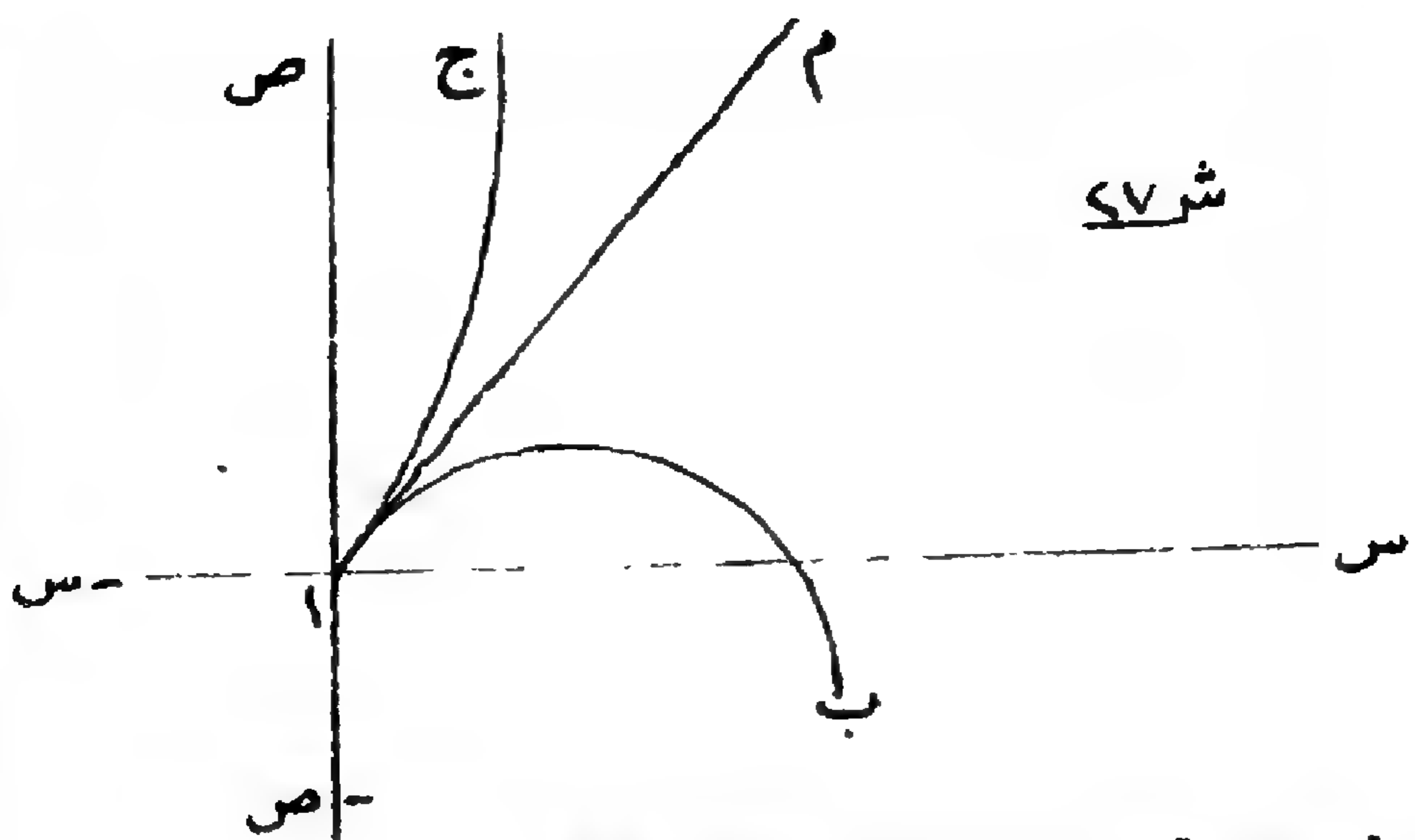
$$x^3 = y \pm x^2$$

فبحدث

$$\frac{1}{x^3} = \frac{y}{x^3} \pm \frac{x^2}{x^3}$$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{y}{x^3} \pm \frac{1}{x}$$

ويرى بسهولة انه من جهة المعينات الموجبة (ش ٢٧) y اهم مقداران حقيقيان ويصيران تخيليين اذا اخذت y مقداراً سالبة فاذا للمنفق فرعان اب ر اج منتهيات في نقطة الاصل ولهما مماس مشترك يتعين اتجاهاه بالمعادلة $\frac{y}{x^3} = 0$ ويرى ايضا ان هذه النقطة ذات النوع الاول لانه اذا اخذت y مقداراً صغيراً جداً كان للمشتقة الثانية $\frac{y}{x^3}$ مقادير مختلفة العلامة

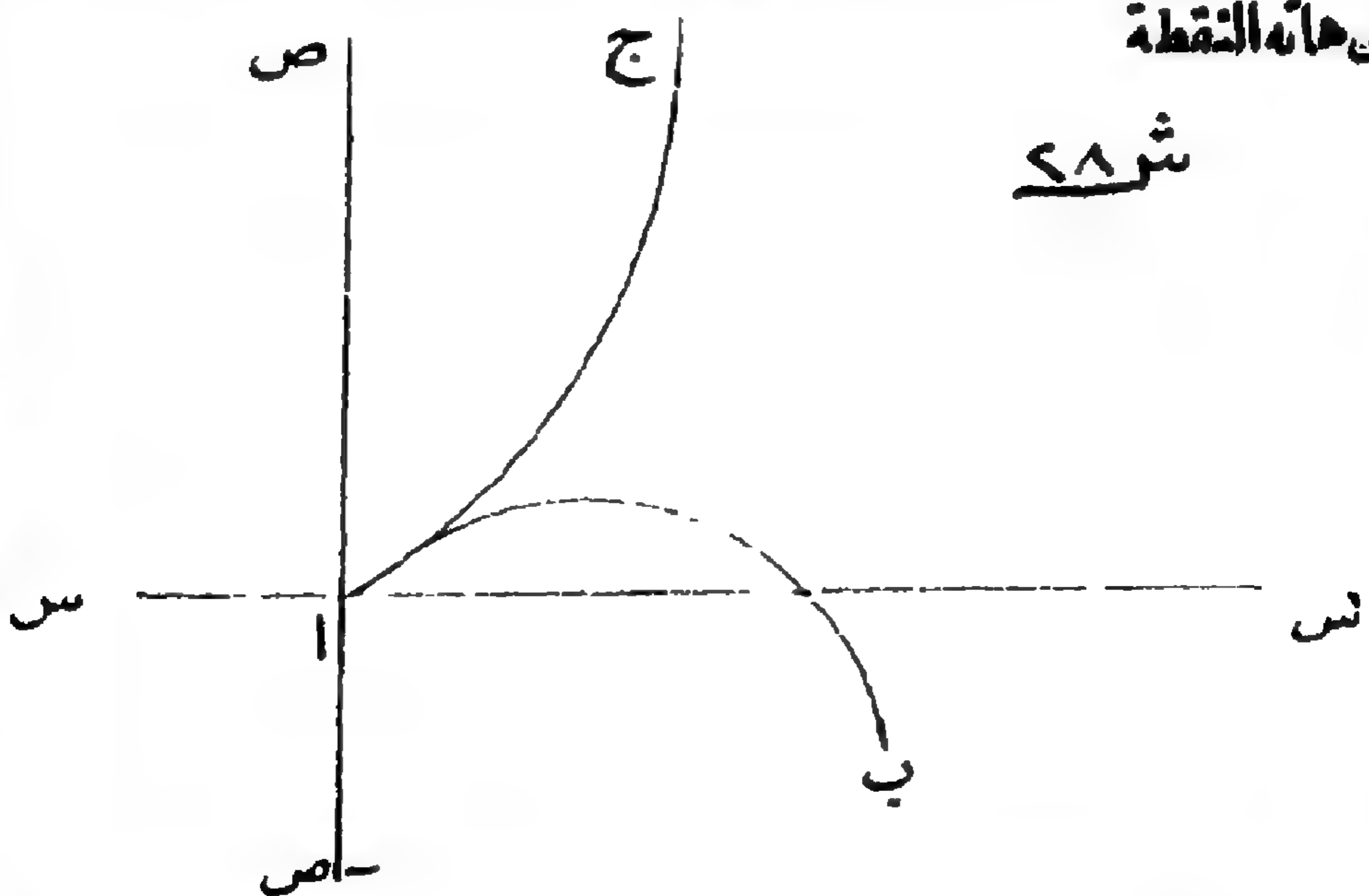


ش ٢٧

وكذا يرى ان المنحنى (ش ٢٨) المبين بالمعادلة

$$١٢ ص - ١٢ ص سر + سر - سر = ٠$$

نقطة رجوع ذات النوع الثاني في الاصل - لوان محور المميزان مماس للفرعين في هاتين النقطتين



ش ٢٨

وعلى العموم اذا كانت م (س د ص) = ٠ معادلة جبرية لمنحنى وكان المرام الحصول على نقط الرجوع فاننا نبعد عن النقط التي احداثياتها تكافئ المعادلات

$$٠ = \frac{٢٦}{٣٦} د \cdot ٠ = \frac{٢٦}{٦٠} م (س د ص) = ٠$$

ثم تختبر المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثانية اذا كانت تعطي للمشتقة $\frac{٢٦}{٦٠}$

مقدارين متساويين وأخيراً بحث عما إذا كان المنحني يعتمد من جهتي المماس
المشترك أو من جهة واحدة ففي الحالة الأخيرة تكون النقطة المعنية نقطة
رجوع ويتميز نوعها بواسطة علامة المشتقة الثانية
٠٤ النقطة المنقرضة

١٢٣ النقطة المنقرضة هي نقطة احداها يكافئان معادلة المنحني بدون أن
تكون على فرع من فروعه لتكن مثلاً المعادلة

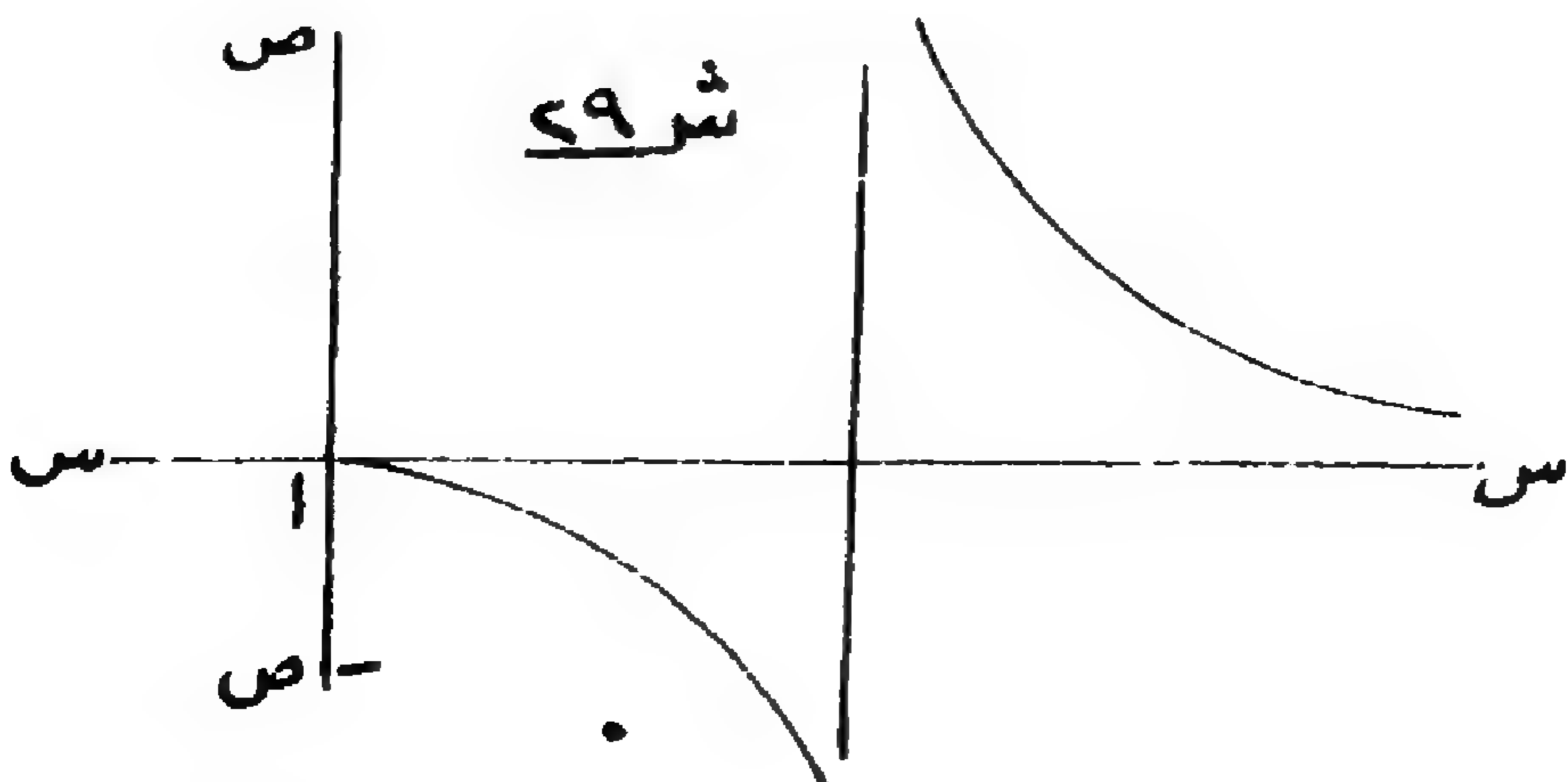
$$ص = + (س - ج) \sqrt{س - د}$$

فإذا فرضنا أن $د > س$ نرى أن $ص$ تصبح تخيلية إذا أخذت $س$ مقداراً
أصغر من $د$ غير المقدار $س = ج$ فإن $ص$ تكون صفراً وإذا انكون
النقطة $س = ج$ و $د = ص$. نقطة منقرضة وإذا فرضنا $د > س$
تكون النقطة المذكورة تنائية

٠٥ نقط الوقوف

١٢٤ إذا كان للمتعلقة $م (س)$ مقدار يصير تخيلياً فالمنحني المميز بالمعادلة
 $ص = م (س)$ يقف بغتة في نقطة تسمى نقطة الوقوف

لتكن مثلاً المعادلة $ص = \frac{1}{لغا س}$ فبكل مقادير $س$ الموجبة تكون $ص$
حقيقية وبكل مقاديرها السالبة تكون $ص$ تخيلية وإذا جعلنا $س = ٠$
يكون $ص = \infty$ فالمنحني نقطة وقوف في الأصل (ش ٢٩)



٦. النقطة المنزوية

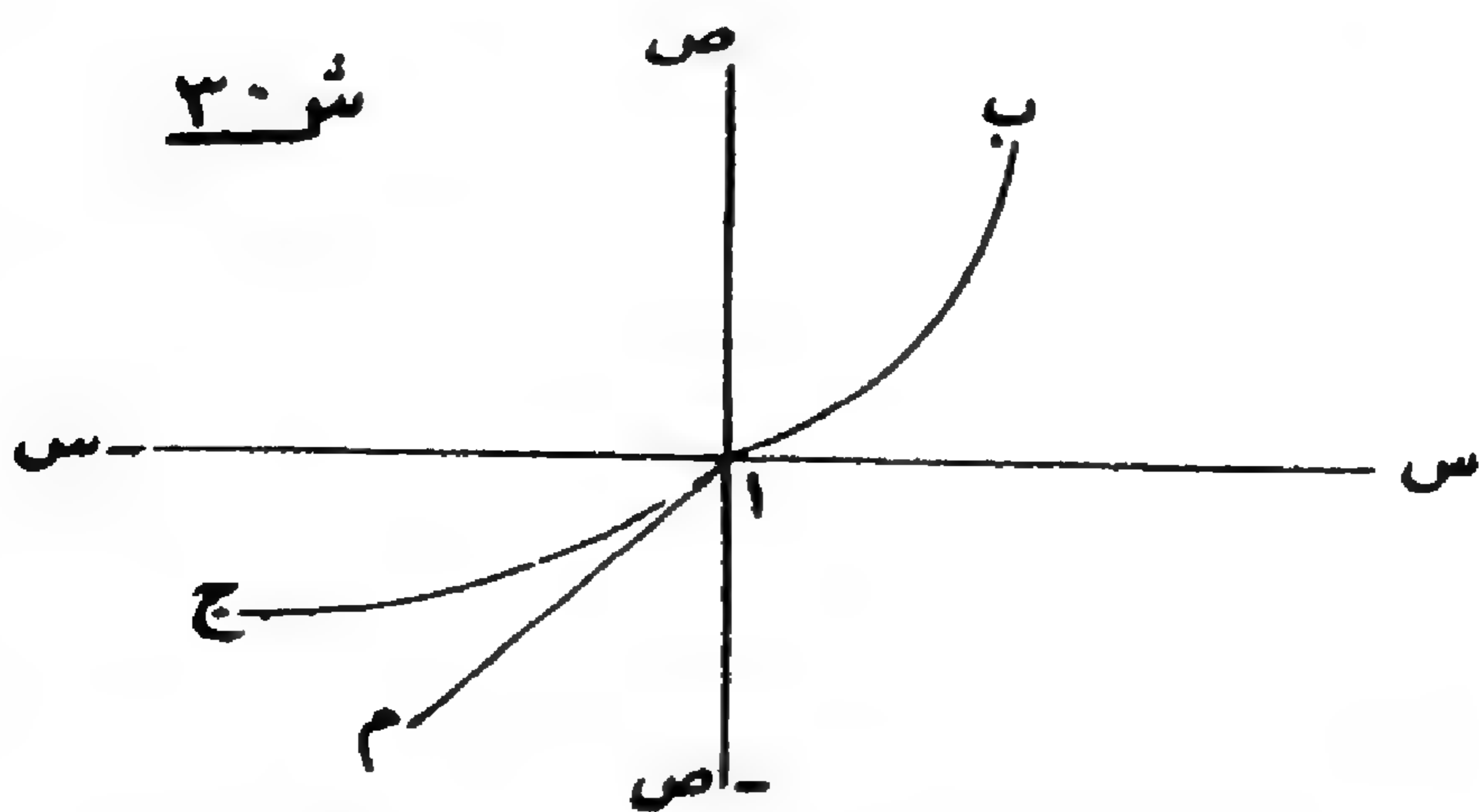
١٢٤ اذا اجتمع فرعان المنحنى في نقطة حيث يكون اهما فيها مماسان مختلفان
 فتسمى تلك النقطة بالنقطة المنزوية فلما تحصيل عليها يكفي ايجاد مقدار s الذي
 به يكون المشتقة $\frac{v}{s}$ مقداران مختلفان
 ايكن مثلا (ش ٣٥) المنحنى الممين بالمعادلة

$$\frac{s}{1+s} = v$$

فتجد انه يمر باصل المحورين وله فيه نقطة منزوية ولايجاد مماسيه في هذه النقطة
 يكفي بموجب ما قلناه في حاشية المطالب ان نعين نهاية النسبة^{٧٣}

$$\frac{1}{\frac{1}{s} + 1} = \frac{v}{s}$$

١٢٥ بفرض ان $s = 0$ فنقول اذا قربت s من الصفر قربت اليكمية
 منه أيضا ومن $\infty + 1$ على حسب كون



s موجبة او سالبة فمكررا معادلتى المماسين يكونان حيث $s = 0$ و
 وعليه يكون المنحنى مكونا من فرعين احدهما موضوع في زاوية المحورين

الموجبين ويسمى محور المعينات في نقطة الاصل والاخرى زاوية المحورين
السالبين ويسمى فيها ايضا منصف الزاوية المذكورة
تمرينات

١. على نقط التغير

١. $\text{ص} = \text{خار}$ (تجد ان هذا المصنف نقط تغير لا يحصى عددها موضوعه على
محور المعينات)

$$\text{٢.} \quad \text{ص} = \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} - \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} \quad \left(\text{تجد نقطة تغير احدها ثانيا} \text{ ص} = \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} \right)$$

$$\left(\frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} = \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} \right)$$

$$\text{٣.} \quad \text{ص} = \text{ج}^{\text{ر}} + \text{ص}^{\text{ر}} = \text{ج}^{\text{ر}} \text{ فبوضع } \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} = \text{ص}^{\text{ر}}$$

$$\left(\text{تجد النقطة ص} = \text{ص}^{\text{ر}} = \text{ج}^{\text{ر}} \right)$$

$$\text{وبوضع } \frac{\text{ص}^{\text{ر}}}{\text{ج}^{\text{ر}}} = \infty \quad \left(\text{تجد نقطة أخرى ص} = \text{ج}^{\text{ر}} \right)$$

٢. على نقط التكرار

$$\text{١.} \quad (1 - \text{ص}) - \text{ص}^{\text{ر}} = (1 + \text{ص}) \quad \left(\text{نقطة الاصل نقطة ثلاثية} \right)$$

$$\text{٢.} \quad \text{ص}^{\text{ر}} + \text{ص}^{\text{ر}} - \text{ص}^{\text{ر}} = \text{ص}^{\text{ر}} + \text{ص}^{\text{ر}} - \text{ص}^{\text{ر}} = \text{ص}^{\text{ر}} \quad \left(\text{نقطة الاصل نقطة ثلاثية} \right)$$

٣. على نقط الرجوع

$$\text{١.} \quad \text{ص} = \text{ج}^{\text{ر}} \pm \text{ص}^{\text{ر}} \quad \left(\text{نقطة رجوع من النوع الاول} \right)$$

$$\text{وهي ص} = \text{ج}^{\text{ر}} \text{ و ص} = \text{ص}^{\text{ر}}$$

$$\text{٢.} \quad \text{ص} = \text{ص}^{\text{ر}} \quad \left(\text{الاصل نقط رجوع من النوع الثاني} \right)$$

٤. على النقط المفردة

$$\text{١.} \quad \text{ص} = \text{ج}^{\text{ر}} \pm \text{ص}^{\text{ر}} \quad \left(\text{نقطة مفردة وهي ص} = \text{ص}^{\text{ر}} \right)$$

$$\text{ج}^{\text{ر}} = \text{ص}^{\text{ر}} = \text{ص}$$

٥٢. $(\text{ص} + \text{ر}) = \text{ج} + \text{ر} + \text{د} = \text{ج}$ (الاصل نقطة منفردة)
 ٥٥. على نقط الوقوف

٥١. $\frac{1}{\text{ر}} = \text{ص}$ (الاصل نقطة وقوف)

٥٢. $\text{ص} = \text{ر} \text{ لغا ر}$ (الاصل نقطة وقوف)
 ٥٦. على النقطة المنزوية

٥١. $\text{ص} = \text{ر} \text{ قو ظا } \frac{1}{\text{ر}}$ (الاصل نقطة منزوية)

(في تحليل المنحنيات)

١٢٥. قد تبين لنا الآن بواسطة ما قدمناه كل ما يلزم لتحليل المنحنيات
 بمناقشة معادلاتها فلذا انحليها ان أمكن بالنسبة الى ر أو ص فيتبين لنا من
 تغير المتعاقبة مسير المنحنى وعدد فروعها ونقطتنا طامعه بالمحور بين الاحد اثنيين
 الخ ثم تكون معادلة المماس فتد لنا على النقط التي فيها المماس موازى لمحور

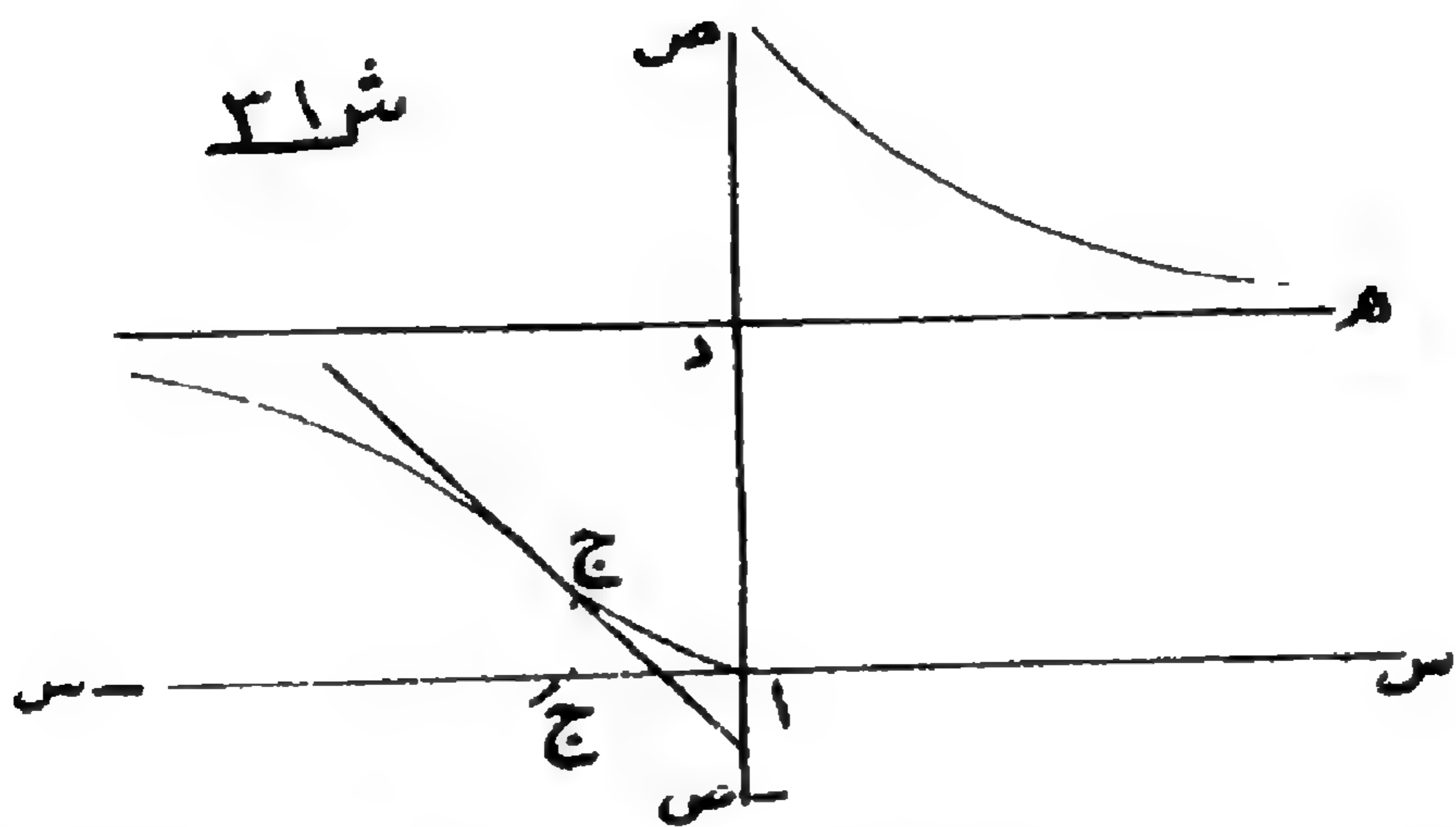
المعينات أو لمحور المرتبات على حسب كون المشتقة $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \infty$ أو $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = 0$

فغالباً هذه النقط تكون في النهايات الكبرى أو الصغرى وإذا كان للمنحنى
 عدة فروع غير نهائية نجد ان خطوط التقريبية بالاعواد الموضحة في الهندسية
 الجبرية (١) ثم نبحث عن $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ وهذا لمعرفة جهة التحديب والتجويف
 ونقط التغير واخيراً نعين النقط الممتازة بالاعواد المذكورة في هذا الباب.
 لتسكن مثلاً المعادلة

(١) لتكن $\text{ص} = \text{ك} + \text{ر} + \text{ل}$ معادلة خط تقريبي غير مواز لمحور
 المرتبات فيكون وضع معادلة فرع المنحنى الذي يقرب من انطاط المذكور
 على الصورة $\text{ص} = \text{ك} + \text{ر} + \text{ل} + \text{م} (\text{ر})$ فتعين $\text{ك} + \text{ر} + \text{ل}$ يجعل
 $\text{ر} = \infty$ في $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\text{ك} + \text{ر} + \text{ل} + \text{م} (\text{ر})}{\text{ر}}$ فيحدث بها $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \text{ك}$
 ثم في $\text{ص} - \text{ك} = \text{ر} + \text{ل} + \text{م} (\text{ر})$ فيحدث بها $(\text{ص} - \text{ك} - \text{ر}) =$
 $\text{ل} + \text{م} (\text{ر})$ وأما الموازى لمحور المرتبات فتعين بمقادير ر التي بها تصبح ص لانتهائية

$$\frac{1}{\text{سر}} = \infty$$

فاذا فرضنا ان $\text{سر} = 0$ تصير $\text{سر} = \infty$ واذا يكون محور المرتببات
(ش ٣١) خطاً تقريبياً واحداً فروع المنحنى وكلما زادت سر من هذا المقدار
الى ∞ تتناقص سر من ∞ الى الواحد فانحط هذا الوازى لمحور



المعينات وبعده منه يساوى واحد دا يكون خطاً تقريبياً أيضاً ويتضح
بسهولة ان الفرع المذکور يخرج من جهة الصادات الموجبة لان المشتقة
الاولى وهى

$$\frac{1}{\text{سر}} = \frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}$$

متصاعدة دائماً ولنفرض الان ان سر تتناقص من الصفر الى ∞
فلذا يتبدل سر بالكمية $-\text{سر}$ فى المعادلة المفروضة ونفرض انها تزيد
من الصفر الى ∞ فنجد

$$\frac{1}{\text{سر}} = \frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\text{سر}}$$

ويجعل $\text{سر} = 0$ تصير $\text{سر} = 0$ وكلما تصاعدت سر تنصاعد
أيضاً سر وتساوى الواحد اذا صارت سر لانهاية فنجد فرعاً يخرج من نقطة

الأصل ويمتد بين محور المعينات والنقط ده الذي تقدم ذكره وهو خط
تقريبى لهذا الفرع أيضا في شاهدان تلك النقطة نقطة وقوف . ولنضع
في المشتقة السابقة s عوضا عن s فيحدث

$$\frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} = \frac{6s}{s^3}$$

ويجعل $s = 0$ يحدث

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{6s}{s^3}$$

فاذا اجتمعنا عن المقدار الحقيقى نجد ان

$$\frac{2}{1} = \frac{6s}{s^3}$$

فبفرض ان $s = 0$ يكون $\frac{6s}{s^3} = 0$ أعنى ان محور المعينات عماس
للمحنى في نقطة الأصل وحيث ان الفرع المذكور ينتهى بان يصير محدباً من
جهة خطه التقريبى فينبغى ان توجد نقطة تغير تمحصل بأخذ المشتقة الثانية

$$\frac{1}{s^2} = \frac{6s^2}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s^3}\right)$$

فاذا وضع s عوضا عن s يحدث

$$\frac{1}{s^2} = \frac{6s^2}{s^4} = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s^3}\right)$$

واذا جعلنا $\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$ أعنى $s = \frac{1}{2}$ يكون $\frac{6s^2}{s^4} = 0$

ونصير $s = \frac{1}{2}$ فلأخذنا $اج = \frac{1}{2}$ و $جج = \frac{1}{2}$ لو وجدنا
النقطة ج وهى نقطة التغير

(تمرينات)

المطلوب تحليل المنحنيات الميمنة بالمعادلات الآتية

(المحنى الجيبى)

$$0.1 = ج س$$

(القاطى)

$$0.2 = ق س$$

$$٠٣ \text{ صر}^٣ - ٣ \text{ ج} \text{ صر} \text{ صر} + \text{صر}^٣ = ٠ \quad (\text{ورقة ديكرت})$$

$$٠٤ \text{ صر} - ٩٦ \text{ ج} \text{ صر}^٢ + ١٠٠ \text{ ج} \text{ صر}^٢ - \text{صر}^٤ = ٠ \quad (\text{المنحنى العفريق})$$

الباب التاسع عشر

(في المنحنيات ذات الانحنائين)

١٢٦ . المنحنى ذو الانحنائين هو الذي لا توجد كل نقطة في سطح مستوي (١)

وقد علم في الهندسة الجبرية ان كل معادلة ذات ثلاث متغيرات كالمعادلة

$$\text{صر}^٣ (\text{صر} \text{ د} \text{ ط}) = ٠$$

تبين سطحاً صر سومياً بالنسبة لثلاثة محاور صر د صر د ا ط وشكله

متعلق بالارتباط الكائن بين المتغيرات صر د صر د ط

وان كل معادلة ذات متغيرتين مثل

$$\text{صر}^٣ (\text{صر} \text{ د} \text{ ص}) = ٠$$

تبين سطحاً اسطوانياً اضلاعه موازية لمحور الاحداثات المحذوفة

وان كل معادلتين مثل

$$\text{صر}^٣ (\text{صر} \text{ د} \text{ ط}) = ٠ \quad \text{د} \text{ م} (\text{صر} \text{ د} \text{ ط}) = ٠$$

اذا اعتبرتا في آن واحد دلتا على الخط المشترك للسطحين المبيئين بكتبتين - ما

مستقيماً كان أو منحنياً فالمنحنيات ذات الانحنائين تتعين - ينتدب معادلتين

كالمعادلتين الاخرين أو بواسطة معادلتين مثل

$$\text{صر} = \text{م} (\text{ط}) \quad \text{د} \text{ ص} = \text{م} (\text{ط})$$

وهي أسهل طريقة

(في المماس)

١٢٧ . اعتبر ط متغيرة مستقلة وانكن

$$\text{صر} = \text{م} (\text{ط}) \quad \text{د} \text{ ص} = \text{م} (\text{ط}) \quad (١)$$

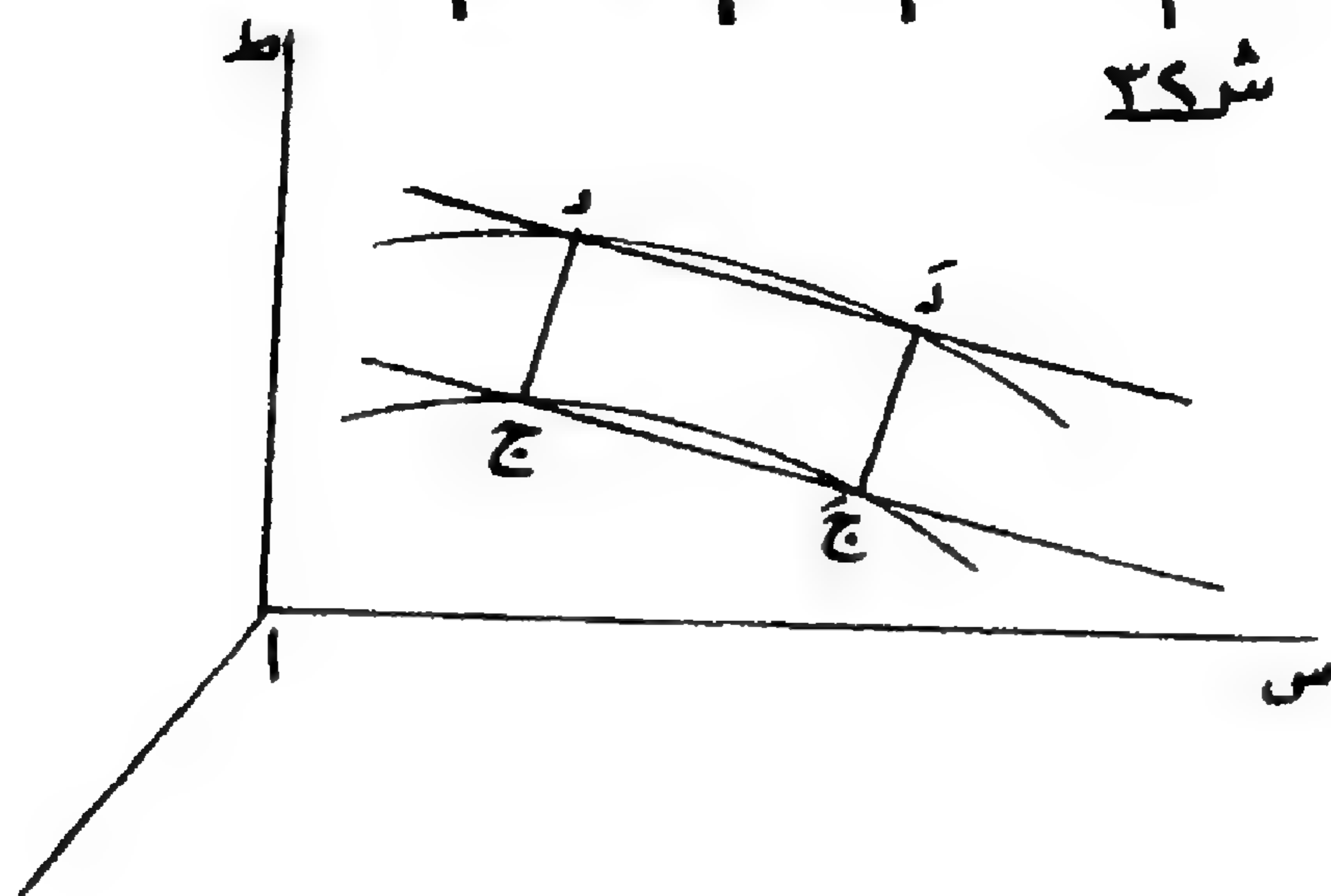
معادلتين منحنيتين في الفراغ فيرى بسهولة انهما يبيضان مسقطي المنحنى المذكور على

المستويين الاحداثيين صر ط د صر ط .

لتكن $س ر د ط$ احدات نقطة ج مثلا (ش ٢٢) و $س$

$$+ \frac{س ر د ط}{1} + \frac{س ر د ط}{1} + \frac{س ر د ط}{1} + \frac{س ر د ط}{1}$$

ش ٢٢



احداثات نقطة أخرى ج فعادلنا القاطع ج ج تكونان حينئذ

$$س - س = \frac{س ر د ط}{1} (ط - ط) د ص - ص = \frac{س ر د ط}{1} (ط - ط)$$

فاذا فرضنا ان النقطة ج تقرب من ج يقرب الخط ج ج من المماس

في ج وتقرب $\frac{س ر د ط}{1}$ و $\frac{س ر د ط}{1}$ من نهايتهما $\frac{س ر د ط}{1}$ و $\frac{س ر د ط}{1}$ اللتين توجدان

باخذ مشتقتي المعادلتين المفروضتين (١) فعادلنا المماس تكونان حينئذ

$$س - س = \frac{س ر د ط}{1} (ط - ط) د ص - ص = \frac{س ر د ط}{1} (ط - ط) \quad (٢)$$

ومن شكلهما يرى ان مساقط المماس عماسة لمساقط المنحنى

واذا اريد بيان المنحنى بمعادلتين ذات ثلاث متغيرات مثل

$$م (س ر د ط) = ٠ د م (س ر د ط) = ٠$$

نجد للمماس المعادلتين

$$٠ = \frac{م}{س} (س - س) + \frac{م}{ر} (ر - ر) + \frac{م}{د} (د - د)$$

ونجد أيضا

$$\frac{\frac{ص}{ط}}{1 + \left(\frac{ص}{ط}\right)^2 + \left(\frac{سر}{ط}\right)^2} = حنا ص$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{ص}{ط}\right)^2 + \left(\frac{سر}{ط}\right)^2} = حنا ط$$

فاذا قربت ف ط من الصفر تقرب ج من ب وتقرب الزوايا سه د سه ر ط من الزوايا سه د سه ر حنا ص والمماس والمحاویر فاذا يكون

$$\frac{\frac{ص}{ط}}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}} = حنا ص + حنا ص = \frac{\frac{ص}{ط}}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}} = حنا ط$$

ومنه

$$(3) حنا سه = \frac{سر}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}} = حنا ص = \frac{ص}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}}$$

$$\frac{ط}{1 + \frac{ص}{ط} + \frac{سر}{ط}} = حنا ط$$

(في المستوى العمودي)

١٢٩ • المستوى العمودي لمن هو المستوى العمودي على المماس في نقطة التماس

يمكن سر د ص د ح ا ح ا فانقطة التماس في كل مستوي مار به يكون له معادلة كهذه

$$٠ = (س - س) + ب (ص - ص) + ج (ط - ط)$$

والتي يكون ٤ وداء على المماس المبين بالمعادلتين

$$س - س = \frac{س}{ط} (ط - ط) \quad د - ص = \frac{ص}{ط} (ط - ط)$$

$$\text{ينبغي ان يكون} \quad \frac{س}{ط} = \frac{١}{ج} \quad \text{و} \quad \frac{ص}{ط} = \frac{ب}{ج}$$

فمعادلة المستوى العمودي تصبح حينئذ

$$٠ = (س - س) \frac{س}{ط} + (ص - ص) \frac{ص}{ط} + ط - ط$$

أو

$$(٤) \quad ٠ = (س - س) \frac{س}{ط} + (ص - ص) \frac{ص}{ط} + ط - ط$$

وهو المطلوب

(في تفاضل قوس المنحن)

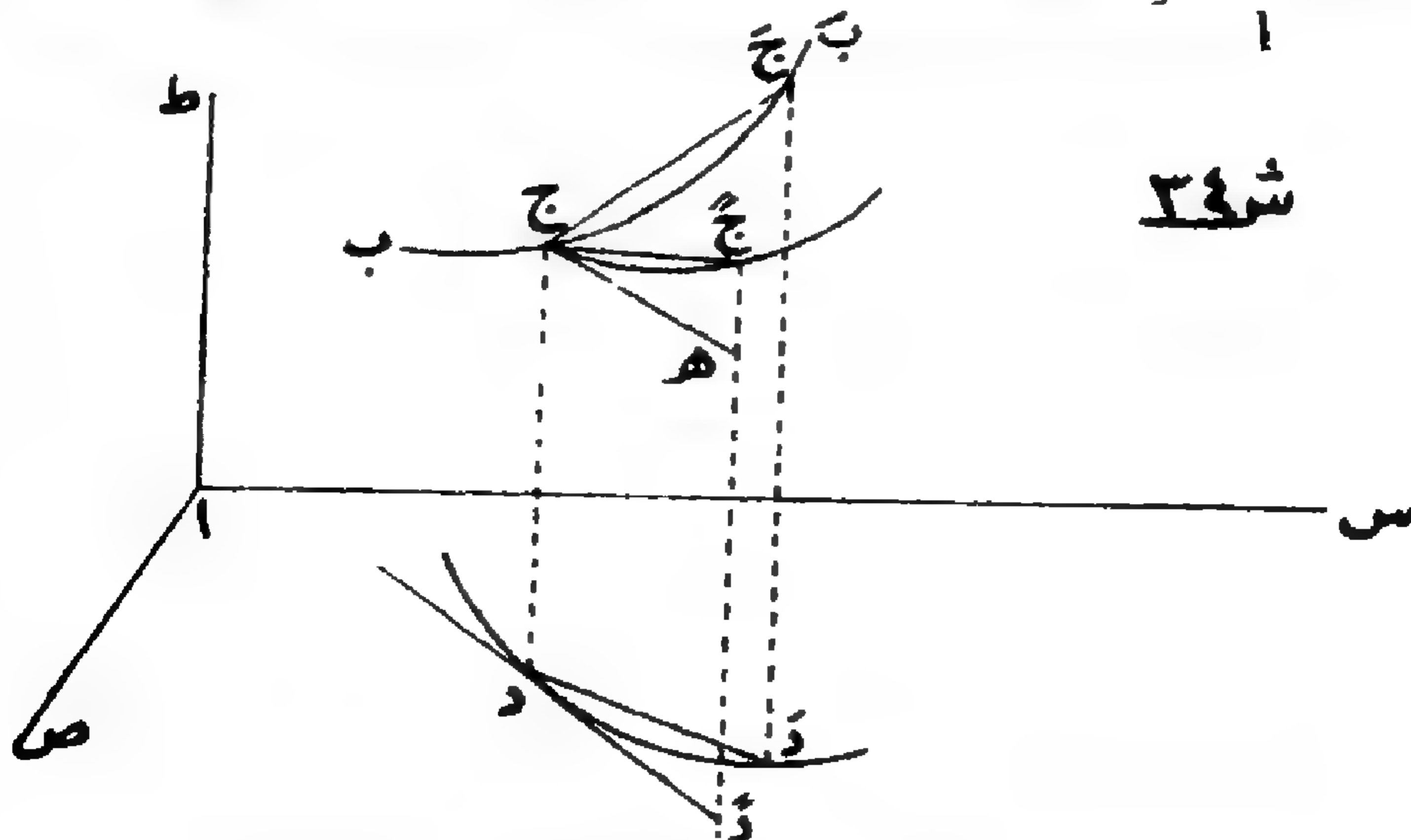
١٣٠. ليكن (ش ٣٤) ب ب منحنيا مرسوما بالنسبة للمعايير اسم د

اصه د ا ط فاذا رمزنا بالحرف و لطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة

ب الى النقطة ج ذات الاحداثان س د ص د ط تكون و متعاقبة

بالتغيرات المذكورة ولنقرض ان س + ف س د ص + ف ص د ط

+ ف ط تكون احداثان نقطة ثانية مثل ج تكون قريبة من الاولى و دد



مسقط القوس ج ج على المستوى م م وانرسم المستوى المار بالمستقيم
ج د والمماس للاسطوانة المسقطية ج ج د د في هذا الخط فيشتمل هذا
المستوى على المماس ج ج للمنحن ج ج وعلى الخط د د المماس للمنحنى
د د واذا بسطنا الاسطوانة عليه فالقوس ج ج يصير القوس المستوى ج ج
والقوس د د يؤول الى الخط المستقيم د د وانجعل قوس ج ج = ف د
قوس د د = ف د ونرسم ج ه موازيا للخط د د بحيث ان بمسدى
النقطتين ج د ج من السطح م م متساويان يكون ج ه = ف ط
ولكن ج ه = د د = ف د فاذا يكون وتر ج ج = ف د + ف ط
ونجد بسهولة ان وتر د د = ف د + ف ص وقد تقدم لنا ان نهاية
نسبة قوس مستوى لوتره تساوى واحد فانها بالكميتين

$$\frac{ف د}{ف د + ف ص} = \frac{ف د}{ف د + ف ط}$$

تكونان - منتهذا واحدا

انفرض ان النائية تكون مساوية للكمية ع مثلا فيحدث

$$ف د = ع (ف ص + ف ط)$$

وبوضع هذا المقدار في الاولى ينتج

ف د

$$ع (ف ص + ف ط) + ف ط$$

ف د

$$ع \left[\left(\frac{ف ص}{ف د} \right) + \left(\frac{ف ط}{ف د} \right) \right] + 1$$

او

$$ع = \frac{\frac{ف د}{ف ط}}{1 + \frac{ف ص}{ف ط} + \frac{ف ط}{ف ط}}$$

ومنها

أو

$$\frac{v_6}{\tau_6} = \gamma \left(\frac{\tau_6}{\tau_6} + 1 \right)$$

ومنها

$$v_6 = \gamma (\tau_6 + \tau_6)$$

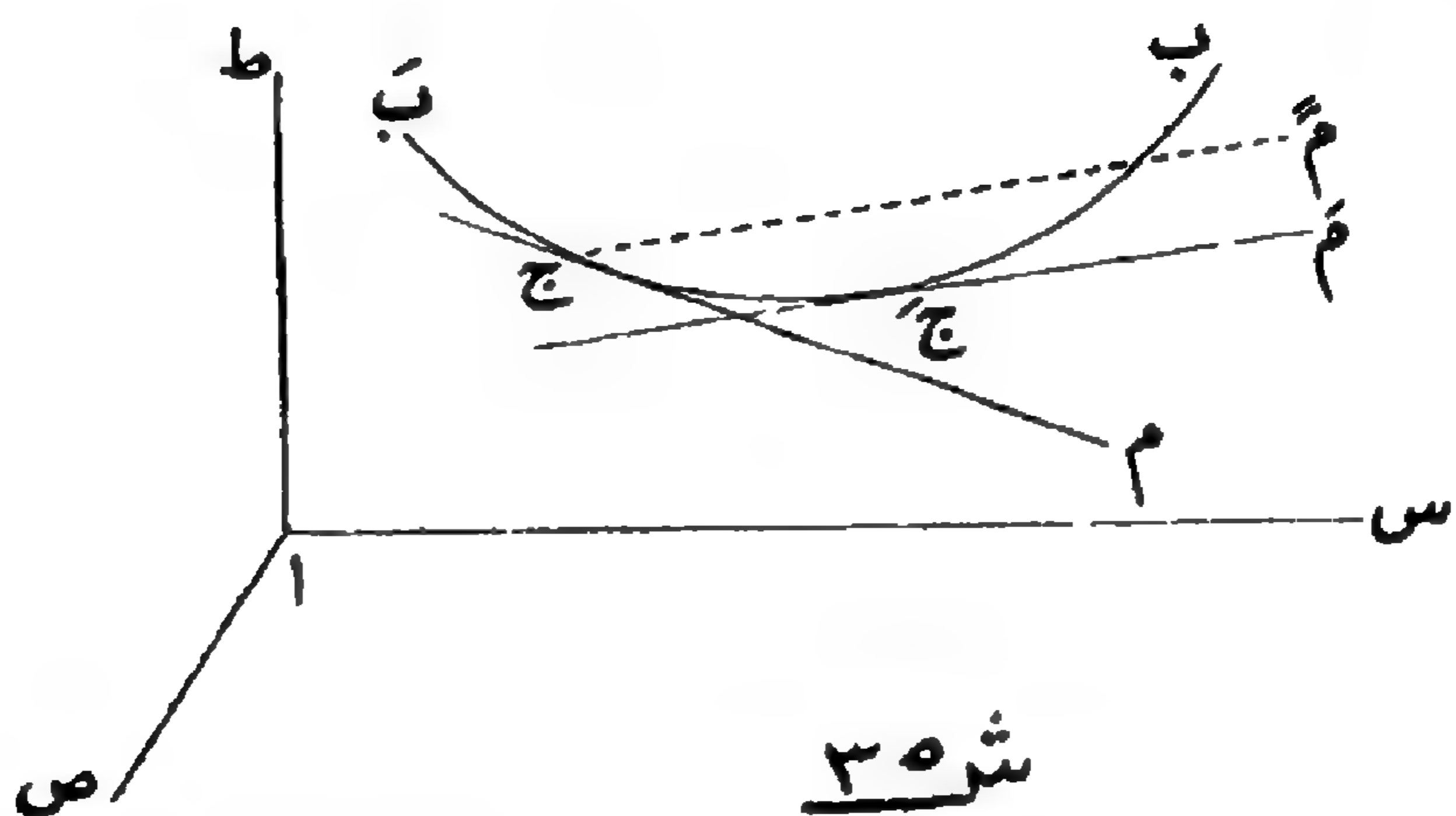
وهو المطلوب

(ملحوظ) بواسطة هذا القانون يمكن وضع القوتين (٣) على هذه الصور

$$(٦) \quad \frac{v_6}{\tau_6} = \gamma \quad \text{و} \quad \frac{\tau_6}{\tau_6} = \gamma \quad \text{و} \quad \frac{\tau_6}{\tau_6} = \gamma \quad \text{(في الاتجاه)}$$

١٣١. ليكن (ش ٣٥) بب منحنيا في الفراغ وانفرض عايمه نقطتين

ج ج متقاربتين جدا



فأذا رسمنا المماسين ج م و ج م يمكن اعتبارهما في مستوى واحد يسمى
بالمستوى الالتصافي (١) للمعنى في النقطة ج ولا صعوبة في ذلك إذا كان
المنحنى المفروض مستويا وأما إذا كان ذا انحناءين فنخرج من النقطة ج خط
ج م موازيا للمماس ج م فيكون بعد المستوى ج م من المماس ج م
كمية صغيرة جدا ففي النهاية يمكن الفرض المذكور وعلى العموم لكل منحنى

(١) الخط العمودي عن المنحنى المربود في المستوى الالتصافي يسمى بالعمود

الأصلي

$$5/7 \cdot 4 = 20$$

وبفرض نر کینه صغيرة يمكن ان يجعل

١٠٠

ویری بسموله ان احداثات النقطة د هی حنا سه و حنا صه و حنا ظ

فاحداثات د نكړون چمنښد

جنا س + 6 جنا س

جنا ص ۶ + جنا ص

جناظ + 6 جناظ

واذا بهد هما يكون

$$\overline{د = ز = \sqrt{(6 \text{ جناسه}) + (6 \text{ جناسه}) + (6 \text{ جناسه})}}$$

فبوضع هذا المقدار في القانون

$$\frac{1}{\text{نق}} = \frac{\text{نر}}{6}$$



$$\left\{ \left(\frac{\text{جنائز}}{ن} \right) + \left(\frac{\text{جنائز}}{ن} \right) + \left(\frac{\text{جنائز}}{ن} \right) \right\} = \frac{1}{ن}$$

وهو المطلوب

(تطبيقات على المصفى البرعى)

١٣٣ المصحف العربي هو مضمن مرسوم على اسطوانة قائمة ذات قاعدة مستديرة بحيث يقطع اضلاعها فيحدث معها أي الاضلاع زوايا متساوية وكيفية انشائه انه يلف على الاسطوانة مستو مرسوم فيه مستقيم ليس عمودا على الاضلاع المذكورة

انفرض ان المماس والاحداثية تكون (ثـ ٢٧) محورا لاسطوانة ط
والمستقيم اب (المماس بالنقطة ب التي فيها يلاقى المنحنى بـج المستوى

ومنها $\frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط}$

١٣٤. لنضع في القانونين (٢) من مطالب مقدار $\frac{ص}{ط}$ و $\frac{ص}{ط}$

السابقين فيحدث لمعادتي المماس في النقطة ج

$$\frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \quad \text{و} \quad \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط}$$

وبمعنى $ط = ط$ نجد

$$(ص - ص) = (ص - ص) \quad \text{أو} \quad ص = ص + ص = ص$$

فيعلم من المعادلة الأخيرة أن مسقط المماس على المستوى $ص$ هو $ص$ بقاعدة الاسطوانة في النقطة $هـ$ لتكن $م$ نقطة تلاقي المستوي $ص$ هو

بالمماس البري في نجد في المثلثين الزائغين $ب ج هـ$ و $م ج هـ$ أن $م هـ$

$= ب هـ$ أعني أن $م هـ$ مساو لـ $ب هـ$ ومن هنا يظهر أن المنحنى $م ج$

الذي ترميه النقطة $م$ حينما يتحرك المماس $م ج$ يكون منتشره محيط طابعا

الاسطوانة فهو حينئذ أشارة محيط الدائرة المذكورة ولايجاد معادلته نفرض

$$ط = ٠ \quad \text{في معادلتى المماس ثم نحسب الكميات} \quad ص \quad ر \quad ط \quad \text{بواسطة}$$

معادلات المنحنى البري فنجد

$$ص ج = \frac{ص^2 + ص^2 - ص^2}{ص} + \frac{ص^2 + ص^2 - ص^2}{ص} = \frac{ص^2 + ص^2 - ص^2}{ص}$$

(ملحوظ) المنحنى $م ج$ المذكور هو أيضا خط تقاطع السطح المسمى بالسطح

البري قابل البسط وهو سطح ناتئ من قعر المماس على المنحنى البري

١٣٥. إذا وضعنا مقادير $ص$ و $ر$ و $ط$ المأخوذة من المعادلات

(٢) في القانون (٥) من المطالب نجد

$$\sqrt{6} = \text{نق} \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (٤)$$

وهو تفاضل طول قوس من البرقي فجوب متميمات الزاوية الناقصة منه
والمحاور الاحداثية تكون حينئذ

$$\frac{\text{حنا م}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \text{حنا م} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حنا م}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \text{حنا م}$$

$$\text{حنا م} = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \quad (٥)$$

فن المعادلة الاخيرة لم يكتب في التعريف ان زاوية المماس والمحور ط
الموازي لاضلاع الاسطوانة كمية ثابتة ومن المعادلات (٤) و (٥) يستخرج

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\text{حنا م}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{حنا م}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

فاذا وضعنا هذه المقادير في قانون نصف قطر الانحناء الاول انرى انه يعادل
(١ + ϵ^2) نق أعني أنه كمية ثابتة

الباب العشرون

(في المستوى المماس للسطوح المنحنية)

١٣٦ • لتكن $\text{م} \text{ ر} \text{ د} \text{ ط}$ احداثات النقطة ج الكائنة على

السطح المنحني المبين بالمعادلة $\text{م} = (\text{م} \text{ ر} \text{ د} \text{ ط})$ • فاذا فرضنا ان

سطحا آخر $\text{م} = (\text{م} \text{ ر} \text{ د} \text{ ط})$ • يمر من النقطة المذكورة في تقاطع

السطحان على خط منحنى يتعين بالمعادلتين

$$\text{م} = (\text{م} \text{ ر} \text{ د} \text{ ط}) = \text{م} = (\text{م} \text{ ر} \text{ د} \text{ ط})$$

واذا رسمنا في النقطة ج مماسا لهذا المنحنى فتكون معادلاته (مطلب)

$$(١) \quad \text{م} = \frac{\text{م}}{\sqrt{6}} + \frac{\text{م}}{\sqrt{6}} (\text{م} - \text{م}) + \frac{\text{م}}{\sqrt{6}} (\text{م} - \text{م}) + \frac{\text{م}}{\sqrt{6}} (\text{م} - \text{م})$$

$$(٢) \quad 0 = \frac{٢٦}{٦} (٢ - ٢) + \frac{٢٦}{٦} (٢ - ٢) + \frac{٢٦}{٦} (٢ - ٢)$$

وكتاهما تبين مستويا مارا بذلك المماس

وحيث ان المعادلة (١) خالصة من المتعلقة من المستوى المميز بها غير متعاق
بالمحقق المار بالنقطة ج ومن هنا يعلم انه اذا رسم على السطح المنحني المقروض
عدة خطوط منحنية مارة بالنقطة ج فان كل المماسات لهذه المنحنيات تكون
في المستوى المميز بالمعادلة (١) وهو حينئذ المستوى المماس

١٣٧ . الخط العمودي على السطح في ج هو العمود على المستوى المماس
في تلك النقطة

لتكن

$$٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٢ - ٢ \quad (٢ - ٢) \quad ٢ = ٢ - ٢$$

معادلاته قلنا تبين الكميتين ٢ و ٢ نلاحظ ان مسقطيه على المستويين
سـ ٢ و ٢ عموديان على أنزى المستوى المماس في المستويين المذكورين
فاذا يكون

$$\frac{\frac{٢٦}{٦}}{\frac{٢٦}{٦}} = ٢ \quad \text{و} \quad \frac{\frac{٢٦}{٦}}{\frac{٢٦}{٦}} = ٢$$

وبمذا نصير المعادلتان السابقتان

$$٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٢ - ٢ \quad (٢ - ٢) \quad \frac{\frac{٢٦}{٦}}{\frac{٢٦}{٦}} = ٢ - ٢$$

ويمكن وضعهما على الصورة

$$\frac{٢ - ٢}{\frac{٢٦}{٦}} = \frac{٢ - ٢}{\frac{٢٦}{٦}} = \frac{٢ - ٢}{\frac{٢٦}{٦}}$$

واذا رسمنا بالحروف سـ ٢ و ٢ زاوية الحاصلة بين العمود والمماس
الاحداثية نجد

$$\begin{array}{c}
 \text{حنا صه} \quad \text{حنا صه} \quad \text{حنا ظ} \\
 = \frac{٢٦}{٦٥} = \frac{٢٦}{٦٥} = \frac{٢٦}{٦٥} \\
 \hline
 \left. \begin{array}{c} \text{حنا صه} + \text{حنا صه} + \text{حنا ظ} \end{array} \right\} \\
 = \left. \begin{array}{c} \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right) + \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right) + \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right) \end{array} \right\} \\
 \text{(في الوشور والاسطوانة المحيطين بسطح نصف)}
 \end{array}$$

١٣٨. اتكن ج (ح ر د هـ) د ج (ح ر د هـ) نقطة معلومتين
 باحداثياتهما وايكن المرام تعيين المستوي المار بهما المماس للسطح المجين
 بالمعادلة م (س ر ص ر ط) = . فنقول ان كل مستوي مماس للسطح
 المفروض تكون معادلته

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - س) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - ص) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - ط)$$

وحيث انه يلزم ان يمر بالنقطتين ج د ج فينبغي ان يكون

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - ح)$$

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - ح)$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة م (س ر ص ر ط) = نجد مقادير
 س ر ص ر ط التي هي احداثيات نقطة التماس

ومن هنا يتضح انه نقطة واحدة ج (ح ر د هـ) غير غالبة المستويات
 مماسات لا يحصى عددها وان احداثيات نقطة التماس توافق المعادلتين

$$(٣) = \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - ح)$$

$$م (س ر ص د ط) = ٠$$

اللتين بينان حينئذ منحني القاس

ويظهر بسهولة ان المستقيمات التي تصل النقطة ج بنقط المنحني المذكور
تقس السطح المقروض وانما تشكل موشورا محيطها به تتعین معادلاته أى الموشور
بحسب $س ر ص د ط$ من معادلاتي أحدها انه المستقيمات وه معادلاتي منحني القاس
١٣٩. افترض ان النقطة ج (ح د د ه) تقع على المستقيم المبين

بالمعادلتين

$$س = ع ط ر ص = غ ط \quad (١)$$

$$\text{فيكون} \quad ج = ع ه د د = غ ه$$

وتصير المعادلة (٣)

$$٠ = \frac{٢٦}{٦ط} (١ - \frac{ط}{ه}) + \frac{٢٦}{٦ص} (\frac{ص}{ه} - غ) + \frac{٢٦}{٦س} (\frac{س}{ه} - ع)$$

فلو فرض ان ه زداد الى ما لا نهاية لآت هذه المعادلة الى

$$٠ = \frac{٢٦}{٦ط} + \frac{٢٦}{٦ص} ع + \frac{٢٦}{٦س} ع$$

وهي مع معادلة السطح بينان المنحني الذي يكون فيه السطح ممسوسا

بالاسطوانة التي اضلاعها موازية للخط (١)

ويرى بسهولة ان المعادلة الاخيرة تدل على ان المستوي المماس مواز للخط

المذكور (١) فهي تبين حينئذ مسطحها محتويا على كل نقط القاس فلتخصيل

على معادلة الاسطوانة المحيطة بالسطح يكفي حذف $س ر ص د ط$ من المعادلتين

$$س - س = ع (ط - ط) \quad د - د = ص - ص = ع (ط - ط)$$

اللتين بينان أحدا اضلاع الاسطوانة ومن معادلاتي منحني القاس

(تطبيق)

لتكن المعادلة ذات الدرجة الثانية

$$اسر + اصا + اطا + ٢ ب س + ٢ ب ص + ٢ ب ط + ٢ ب ف = ٠$$

فتجد

$$\frac{26}{6س} = \frac{2}{6ص} (ا + س + ب) د \frac{2}{6ط} = \frac{2}{6ط} (ا + ط + ب)$$

فمعادلة المستوي المماس تكون حينئذ

$$(ا + س + ب) (س - س) + (ا + ص + ب) (ص - ص) + (ا + ط + ب) (ط - ط) = 0$$

ويمكن وضعها على الصورة

$$(ا + س + ب) س + (ا + ص + ب) ص + (ا + ط + ب) ط$$

$$+ ب س + ب ص + ب ط + ف = 0$$

و بتبديل س ر ص د ط بالكميات ح د ر ه تحدث المعادلة

$$(ا + س + ب) ج + (ا + ص + ب) د + (ا + ط + ب) ه$$

$$+ ب س + ب ص + ب ط + ف = 0$$

وهي ذات الدرجة الاولى بالنسبة الى س ر ص د ط فينتج من ههنا ان
الموشور المحيط بالسطح ذي الدرجة الثانية يمس على منحن مستو .

والاسطوانة لمحطة القياض لاهام وازية للمستقيم

$$س = ع ط ر ص = ع ط$$

تمس السطح المفروض على منحن وجود في المستوي

$$(ا + س + ب) ع + (ا + ص + ب) د + (ا + ط + ب) ه = 0$$

وتكون معادلة العمود على السطح

$$\frac{س - س}{ا + س - ب} = \frac{ص - ص}{ا + ص - ب} = \frac{ط - ط}{ا + ط - ب}$$

بعضهم امن بهض وتشكل في النهاية مسير هندسي ياتكون معادلاته

$$r = (s + d) \cdot$$

ويسمى هذا المسير غلاف المنحنيات المبيغة بالمعادلة المقروضة وتسمى هذه المنحنيات بالمغلوقات

ويرى بسهولة انه يمكن ايجاد المعادلة الاخيرة بحذف الكمية d في المعادلة المقروضة ومن مشتقاتها بالنسبة الى d لانه من العلوم ان

$$m = (s + d + d) = m + (s + d + d) + s + m \\ (s + d + d + s)$$

فالمعادلتان (١) تصيران

$$m = (s + d + d) = m + (s + d + d) + s + m \\ \text{وبأخذ النهاية يحدث}$$

$$m = (s + d + d) = m + (s + d + d) + s + m \quad (١)$$

وهو ما أردنا بيانه

(نظرية) الغلاف يمر كل المغلوقات

لتكن J نقطة مشتركة للغلاف والمغلوف ما قبل المماس للمغلف الثاني في هذه النقطة يكون

$$\frac{\frac{r}{s}}{\frac{r}{s}} = \frac{r}{s}$$

وميل مماس الغلاف في النقطة المذكورة يوجد بأخذ مشتقة المعادلة $r = (s + d)$ لكن حيث ان هذه المعادلة ناشئة من حذف d

بين المعادلتين (١) فنحصل على المشتقة المطلوبة باعتبار d في أولهما متعلقة بالمشتقتين s و r مبينة بناتيهما فاذا كان في أخذ مشتقة

م (سر د ص د ج) = . الكمية فيحدث

$$. = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص}$$

وحيث ان $\frac{م}{ص}$ أو م (سر د ص د ج) = . نزل هذه المعادلة الى

$$. = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص}$$

ومنها

$$\frac{\frac{م}{ص}}{\frac{م}{ص}} = \frac{ص}{ص}$$

وهو عين المقدار السابق فلان محبين المذكورين في النقطة ج مما س واحد
فهما حيتئذ مما سان وهو المطلوب

(تطبيق)

المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$ص = ج + \sqrt{أ' ج' + ب'}$$

المقروض فيها ان ج كمية غير معينة
لناخذ مشتقتها نسبة الى ج فيحدث

$$. = \frac{أ'}{ج' + ب'} + .$$

وبحذف ج من هاتين المعادلتين نجد معادلة الغلاف وهي

$$أ' ص' + ب' = أ' ب'$$

أعني انه قطع ناقص

(تعميمات)

١. المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$ص = ج + ج' + ج''$$

$$ص' = ج' + ج''$$

الجواب

٢. غلاف مستقيم طوله l وطرفاه منحركان على ضلعي زاوية قائمة

$$(\text{الجواب}) \quad \frac{r}{3} = \frac{r}{3} + \frac{r}{3}$$

٣. غلاف العواميد المنحني $ص = م (س)$

(الجواب) هو منتشر المنحني المنروض

(في السطوح الغلافية)

١٤١. لتكن $م (س ر ص ر ط ر ج) = ٠$ معادلة سطح تحتوي على كمية $ج$ غير معينة فيرى كما تقدم انه اذا انحوتنا هذه الكمية بين المعادلتين

$$م (س ر ص ر ط ر ج) = ٠$$

$$م (س ر ص ر ط ر ج + س) = ٠$$

تحدث معادلة كهذه $م (س ر ص ر ط) = ٠$ تبين سطحاً يمر بخطوط تقاطع السطوح الناشئة من المعادلة المقروضة واذا تناقصت $س$ فتقرب هذه الخطوط بعضها من بعض وتشكل سطحاً تكون معادلاته $م (س ر ص ر ط) = ٠$ وهي ناتجة من حذف $ج$ بين المعادلتين

$$م (س ر ص ر ط ر ج) = ٠$$

$$م (س ر ص ر ط ر ج) = ٠$$

فهذا السطح يسمى بالغلاف وخطوط التقاطع المذكورة سماها المهندسون الشهير موليج (١) بالخطوط التعريفية وهي تبين بالمعادلتين السابقتين .
يمكن مملا المطلب غلاف الكرة التي مركزها يتحرك على محيط دائرة معلومة لنفرض ان هذه الدائرة تكون في المستوى الاحداثي $س ص$ ومركزها في الاصل فتكون معادلتها

$$(١) \quad ج^2 = س^2 + ص^2$$

وتكون معادلة الكرة

(١) هو أحد الرياضيين الفرنسيين الكبار ولد سنة ١٧٤٦ ومات في سنة

١٨١٨ وهو مخترع الهندسة الوصفية

$$(س - ج) + (ص - ط) + ن = (٢)$$

فاذا محونا د من هاتين المعادلتين فنجعل معادلة تحتوي على المتغيرات س و ص و ط و ج فانما نأخذ مشتقة المعادلة (٢) باعتبار د متعلقة بالمتغيرة ج مبينة بالمعادلة (١) فيحدث

$$س - ج + (ص - ط) \frac{د}{ج} = ٠$$

ومن (١) ينتج

$$\frac{د}{ج} = \frac{س}{ص}$$

فتؤل المعادلة السابقة الى

$$س - ج + (ص - ط) \frac{س}{ص} = ٠$$

$$س - ج + ص - ط = ٠ \quad (٣)$$

فاذا محونا من (١) و (٢) و (٣) الكميتين ج و د يحدث

$$(س + ص + ج) - (ن + ط) = ٠$$

وهي معادلة الغلاف المطلوب

(تجربتان)

١. المطلوب غلاف المستويات المماسية للشجيين أحدهما موجود في المستوى الاخرى س و ط والآخر في ص و ط
(الجواب)

$$ط = س + ج + (ص - ط) \frac{د}{ج}$$

٢. المطلوب غلاف مستوي متحرك مار بنقطة معلومة وبعده من نقطة أخرى معلومة أيضا يكون ثابتا اذا كانت ب هي البعد المقروض وكانت

$$م = س + ج + (ص - ط) \frac{د}{ج}$$

معادلة المستوى فيكون الجواب

$$(هـ - ب) (س + ج) - (ط - هـ) = ٠$$

قد تم طبع الجزء الاول من حساب التفاضل بمطبعة بولاق الاميرية في أوائل
 شهر ربيع الاول سنة ألف ومائتين وتسع وتسعين هجرية وباليه الجزء الثاني في
 حساب التكامل هذا ولما كانت التاليف هدفها استتمام الانتقاد والاعتراض
 أتيت راجيا من الواقفين على كتابي هذا من اهل العلم ان يسدوا سدول الاغضاء
 على ما عساهم أن يعثروا عليه مما لا يرى نفسه منه من الغلت والغلط لاسيما
 وانه في ما أعلم أول تاليف عربي في هذا العلم ظهر بالبلاد الشرقية
 وكما يقال كل شيء صعب في أوله ولهذا ارجو من اهل
 الفضل عموما واخواني المصيريين خصوصا
 ان يتلقوه بيد القبول وينظروه بعين
 الرضا التي لا يراهم الا بها
 صادق الاخاء
 شفيق



